This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

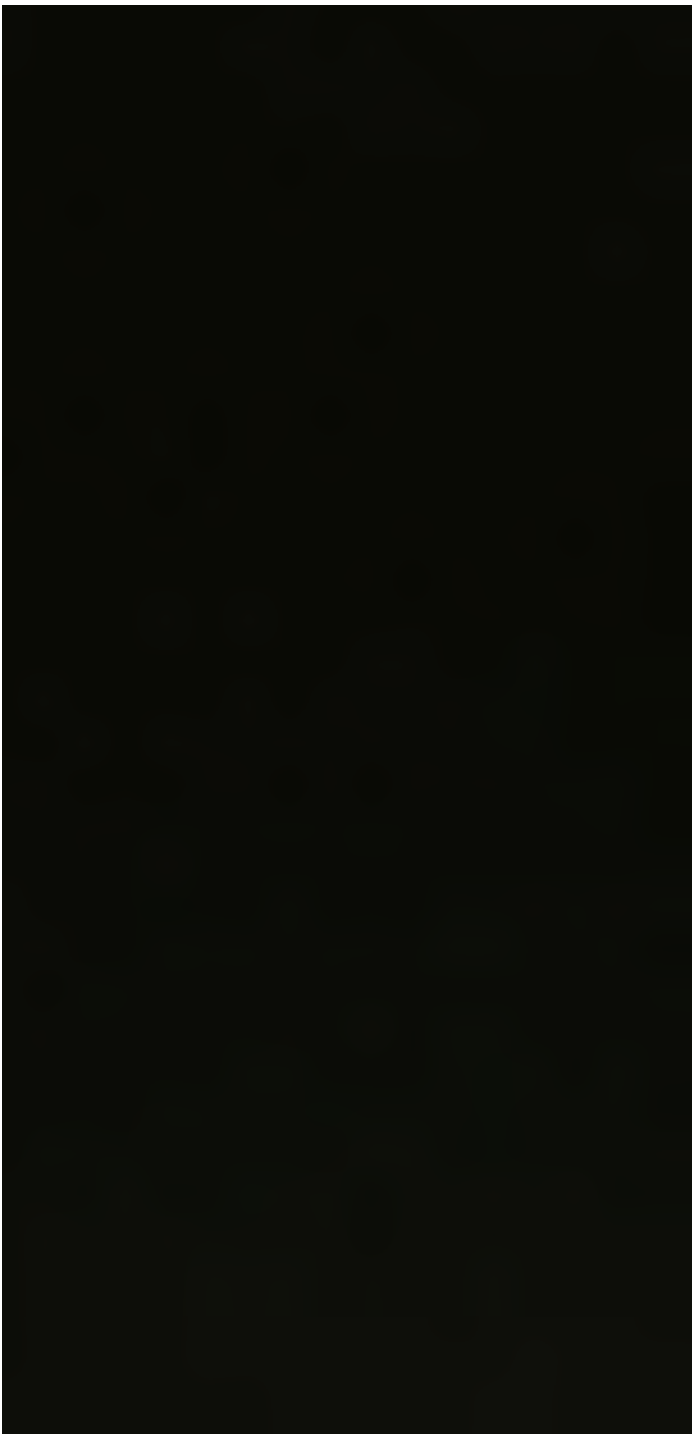
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

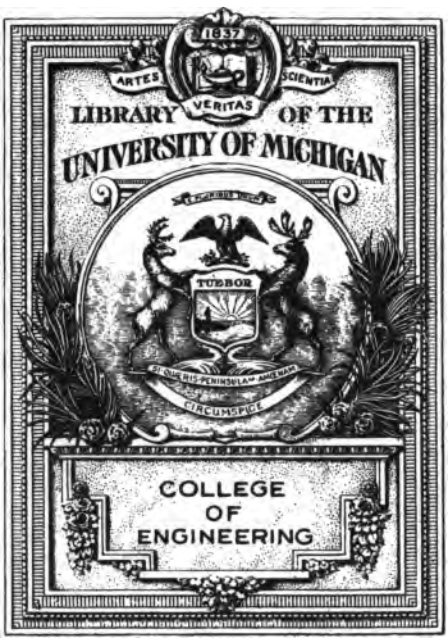
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIAE
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
COLLEGE
OF
ENGINEERING

Math.-Econ.
Library
QA
311
.M41
1885
Soppl.

APPENDICE AU MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS

Extrait des Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand, tome XII, troisième livraison.

APPENDICE AU MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS

PAR

J. MASSAU

Ingénieur des ponts et chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

GAND,

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE E. VAN GOETHEM,

Rue des Foulons, 1, (près de l'Université).

APPENDICE AU MÉMOIRE

SUR

L'INTEGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS

PAR

J. MASSAU
Ingénieur des ponts et chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

1890

Math-Econ. Library
trans.
5-18-56
G-25-1917
Rec'd 9-9-39 MJB

APPENDICE AU MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

Dans la rédaction de notre Mémoire sur l'intégration graphique, nous n'avons abordé que les questions les plus utiles ou les plus simples. Nous avons réservé les questions difficiles, pour en faire l'objet de publications spéciales. Nous réunissons, dans le travail qui suit, une série de notes destinées à servir de complément à notre mémoire. Nous y avons ajouté un aperçu historique des recherches diverses qui ont quelque rapport avec notre système de constructions graphiques.

NOTE I.

Sur la construction des fonctions entières.

1re MÉTHODE.

741. On demande de construire une parabole de degré $n-1$, c'est-à-dire une courbe ayant une équation de la forme

$$y = a + bx + cx^2 \cdots + lx^{n-1},$$

de manière à satisfaire aux n conditions suivantes :

pour $x = x_1$, $y = y_1$, $\frac{dy}{dx} = y'_1 \cdots \frac{d^{\alpha-1}y}{dx^{\alpha-1}} = y_1^{(\alpha-1)}$

353749

pour $x = x_2$, $y = y_2$, $\frac{dy}{dx} = y'_2 \cdots \frac{d^{\beta-1}y}{dx^{\beta-1}} = y_2^{(\beta-1)}$

. . . . . .

pour $x = x_k$, $y = y_k$, $\frac{dy}{dx} = y'_k \cdots \frac{d^{\lambda-1}y}{dx^{\lambda-1}} = y_k^{(\lambda-1)}$

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n$$

Ce problème est la généralisation des problèmes que nous avons résolus aux numéros 94 et 98. Nous appliquerons le même procédé.

L'équation de la parabole cherchée peut se mettre sous la forme :

$$y = y_1 + (x - x_1)y'_1 + (x - x_1)^2 \frac{y''_1}{1.2} \cdots + (x - x_1)^{\alpha-1} \frac{y_1^{(\alpha-1)}}{1.2.3 \ldots (\alpha - 1)} + \\ + M(x - x_1)^\alpha$$

formule qui n'est autre que la formule de Taylor.

Transportons l'origine au point (x_1, y_1), divisons les ordonnées de la courbe par leurs abscisses (73), nous obtiendrons une nouvelle courbe, dont l'ordonnée s'exprime par la formule :

$$z = \frac{y - y_1}{x - x_1} = y'_1 + (x - x_1)\frac{y''_1}{1.2} \cdots + (x - x_1)^{\alpha-2} \frac{y_1^{(\alpha-1)}}{1.2 \ldots \alpha - 1} + \\ + M(x - x_1)^{\alpha-1}.$$

Cette nouvelle courbe est une parabole de degré $n - 2$, car la division par $x - x_1$ a diminué le degré du second membre d'une unité. Nous allons démontrer qu'elle est déterminée par $n - 1$ conditions. Nous aurons ainsi ramené le problème proposé à un problème plus simple.

Pour $x - x_1$, on a en effet;

$$z = y'_1, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y''_1}{2}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{y'''_1}{3} \cdots \frac{d^{\alpha-2}z}{dx^{\alpha-2}} = \frac{y_1^{(\alpha-1)}}{(\alpha - 1)}.$$

En d'autres termes, au point x_1, il y a pour la parabole z, $\alpha - 1$ conditions, soit une de moins que pour la parabole y.

Les autres conditions de la parabole y, fournissent un même nombre de conditions de la parabole z. De la relation

$$z = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

on déduit, en chassant le dénominateur et en prenant les dérivées du premier membre, qui est un produit, par la règle de Leibnitz :

$$z(x - x_1) = y - y_1$$

$$(x - x_1)\frac{dz}{dx} + z = \frac{dy}{dx}$$

$$(x - x_1)\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

. . . . . .

$$(x - x_1)\frac{d^kz}{dx^k} + k\frac{d^{k-1}z}{dx^k} = \frac{d^ky}{dx^k}.$$

Si en un point x_2, on connait y, et $\beta - 1$ dérivées, on en déduira z et $\beta - 1$ dérivées. Si l'ordonnée y et ses dérivées sont représentées par des droites, on en déduira z et ses dérivées par une construction simple fondée sur la division graphique par $x - x_1$. Après avoir effectué toutes ces opérations et pour tous les points connus de la parabole y, on obtiendra le $n - 1$ conditions de la parabole z.

En appliquant le même raisonnement à la parabole z, on ramènera sa construction à celle d'une parabole de degré $n - 2$ et ainsi de suite. Finalement, on sera ramené à tracer une droite satisfaisant à deux conditions, savoir : deux points ou un point et la direction. Cette droite étant tracée, on peut obtenir un point quelconque de toutes les paraboles et en particulier de la parabole cherchée, en effectuant une série de multiplications.

En traduisant par le calcul les différentes opérations que nous venons d'indiquer, on trouverait une formule donnant une fonction entière $F(x)$, connaissant $F(x_1)$, $F'(x_1)$ ... $F^{(d-1)}(x_1)$; $F(x_2)$, $F'(x_2)$ ... etc.

Cette formule, après un calcul insignifiant, devient la formule de Newton généralisée.

Prenons, par exemple, le cas d'une parabole du quatrième degré; on donne :

pour $x = x_1, \quad y_1, \quad y'_1, \quad y''_1$

pour $x = x_2, \quad y_2, \quad y'_2.$

La première transformation,

$$z = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ramène le problème à la construction de la parabole du troisième degré qui satisfait aux conditions suivantes :

pour $x = x_1, \quad \cdots \quad z_1 = y'_1, \quad z'_1 = \frac{y''_1}{2}$

pour $x = x_2, \quad z_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad z'_2 = \frac{y'_2 - z_2}{x_2 - x_1}.$

La seconde transformation

$$u = \frac{z - z_2}{x - x_2}$$

ramène le problème à la construction de la parabole du second degré qui satisfait aux conditions suivantes :

pour $x = x_1, \quad \cdots \quad u_1 = z'_1$

pour $x = x_2, \quad \cdots \quad u_2 = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}, \quad u'_2 = \frac{z'_2 - u_2}{x_2 - x_1}.$

La troisième transformation

$$v = \frac{u - u_1}{x - x_1}$$

ramène le problème à la construction de la droite qui satisfait aux deux conditions suivantes :

$$\text{pour} \quad x = x_2 \quad \cdots \quad v_2 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \quad v_2' = \frac{u_2' - v_2}{x_2 - x_1}.$$

On trouve alors successivement les équations de la droite et des paraboles u, z, y, on obtient :

$$\begin{aligned} v &= v_2 + v_2'(x - x_2) \\ u &= u_1 + v(x - x_1) \\ z &= z_1 + u(x - x_1) \\ y &= y_1 + z(x - x_1) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$y = y_1 + z_1(x - x_1) + u_1(x - x_1)^2 + v_2(x - x_1)^3 + \\ + v_2'(x - x_2)(x - x_1)^3.$$

C'est en effet, la formule de Newton généralisée. Toutefois nous rencontrerons plus loin une méthode graphique qui donne une interprétation plus fidèle de la formule de Newton.

742. Polygone d'intégration. Une parabole peut être considérée comme résultant des intégrations successives d'une constante. En effectuant les intégrations graphiquement, on arrive à déterminer une parabole de degré n par un polygone d'intégration de n côtés. Connaissant ce polygone, on peut déterminer très-élégamment (549) un point et une tangente quelconques ; on peut aussi trouver les intégrales successives de cette parabole. Il est donc très-utile de faire voir comment on peut déterminer le polygone d'intégration d'une parabole déterminée par un nombre suffisant d'ordonnées et de dérivées.

Lorsqu'on applique la méthode précédente, on est ramené à tracer une ligne droite et à effectuer sur cette droite une série de transformations. Chacune d'elles consiste à multi-

plier les ordonnées z d'une parabole par ses abscisses, comptées à partir d'un point x_1 et ensuite à ajouter une constante. Nous aurons résolu complètement la question en donnant la solution du problème suivant : on donne le polygone d'intégration d'une parabole z, trouver le polygone d'intégration de la parabole $y = z(x - x_1)$. La constante z_1 s'ajoute en descendant l'axe des x, et cette opération n'altère pas le polygone d'intégration.

Connaissant le polygone d'intégration de la parabole z, entre deux abscisses quelconques, on peut toujours en déduire le polygone d'intégration entre l'abscisse x_1 et une autre abscisse $x_1 + h$. En plaçant l'origine au point x_1, les abscisses limites sont o et h, et l'équation de la parabole z, si elle est de degré $n - 1$ est de la forme (554) :

$$z = M_0\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-1} + M_1\frac{n-1}{1}\frac{x}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-2} +$$

$$+ M_2\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{x}{h}\right)^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-3} + \cdots$$

Dans cette formule M_0, M_1, M_2... sont les ordonnées du polygone d'intégration.

La transformée a pour équation $y = z\,x$, ou

$$y = M_0 h\frac{x}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-1} + M_1 h\frac{n-1}{1}\left(\frac{x}{h}\right)^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-2} +$$

$$+ M_2 h\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{x}{h}\right)^3\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-3} + \cdots$$

Soient N_0, N_1, N_2... les ordonnées du polygone d'intégration de la parabole y, on a :

$$y = N_0\left(1-\frac{x}{h}\right)^n + N_1\frac{n}{1}\frac{x}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-1} + N_2\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x}{h}\right)^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-2} + \cdots$$

En identifiant les deux valeurs de y, on trouve :

$$N_0 = 0$$

$$N_1 = M_0 \frac{h}{n}$$

$$N_2 = M_1 \frac{2h}{n}$$

$$N_3 = M_2 \frac{3h}{n}$$

. . . . .

$$N_n = M_{n-1}\, h$$

Ces valeurs se construisent en les considérant comme des surfaces de rectangles. Soient (fig. 311, pl. VI) A B C D le polygone d'intégration donné; projetons les sommets A, B, C, D, sur l'axe $x = 1$, et tirons les rayons Oa, Ob, Oc, Od. Les sommets A′, B′, C′, D′, du polygone cherché se trouvent sur ces rayons, et ont pour abscisses $\frac{h}{n}$, $\frac{2h}{n}$, $\frac{3h}{n}$, etc. : le premier sommet est l'origine O. Réciproquement connaissant le polygone OA′B′C′D′, on en déduirait facilement le polygone ABCD.

Pour obtenir le polygone d'intégration d'une parabole déterminée par un certain nombre de conditions, nous ramenons d'abord la construction de cette parabole à la construction d'une ligne droite; le polygone d'intégration de la droite c'est la droite elle-même. Après une première multiplication on obtient une parabole du second degré; on détermine son polygone d'intégration par la construction que nous venons d'exposer. On opère de même pour chaque multiplication et le problème est résolu.

Avant de déterminer, par cette méthode, le polygone d'intégration d'une nouvelle parabole, il est indispensable de transformer le polygone connu de manière à lui donner pour origine un point dont l'abscisse soit x_1, x_2, x_3... quand on multiplie par $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$. On pourrait se pas-

ser de cette transformation du polygone d'intégration, en résolvant le problème suivant : on donne le polygone d'intégration d'une parabole z, pour un arc compris entre les abscisses a et b; on demande le polygone d'intégration de la parabole $y = zx$.

Prenons une origine provisoire ayant l'abscisse a ; soit $b - a = h$; l'équation de la parabole z est :

$$z = M_0\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-1} + M_1\frac{n-1}{1}\frac{x'}{h}\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-2} +$$

$$+ M_2\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{x'}{h}\right)^2\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-3} + \cdots$$

Multiplions par x, en remarquant que :

$$x = \frac{x'}{h}b + \left(1-\frac{x'}{h}\right)a.$$

On trouve :

$$y = M_0 a\left(1-\frac{x'}{h}\right)^n + M_1 a\frac{n-1}{1}\frac{x'}{h}\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-1} +$$

$$+ M_2 a\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{x'}{h}\right)^2\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-2} + \cdots$$

$$+ M_0 b\frac{x'}{h}\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-1} + M_1 b\frac{n-1}{1}\left(\frac{x'}{h}\right)^2\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-2} + \cdots$$

Soient $N_0, N_1, N_2 \ldots$ les ordonnées du polygone cherché, on a aussi :

$$y = N_0\left(1-\frac{x'}{h}\right)^n + N_1\frac{n}{1}\frac{x'}{h}\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-1} +$$

$$+ N_2\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x'}{h}\right)^2\left(1-\frac{x'}{h}\right)^{n-2} + \cdots$$

En identifiant les deux valeurs de y, on trouve :

$$N_0 = M_0 a$$
$$N_1 = M_1 a \frac{n-1}{n} + M_0 b \frac{1}{n}$$
$$N_2 = M_2 a \frac{n-2}{n} + M_1 b \frac{2}{n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_{n-1} = M_{n-1} a \frac{1}{n} + M_{n-2} b \frac{n-1}{n}$$
$$N_n = M_{n-1} b.$$

Chacune des ordonnées N_1, N_2,... représente la surface de deux rectangles; les hauteurs sont les ordonnées du polygone connu; les bases s'obtiennent en divisant a_1 et b-a en n parties égales. Soient, en partant de l'abscisse a, a_1, a_2, a_3... et c_1, c_2, c_3... les abscisses des points de division obtenus pour l'intervalle $a - o$ et l'intervalle $b - a$; on a :

$$N_0 = Ma$$
$$N_1 = M_1 a_1 + M_0 (c_1 - a_1)$$
$$N_2 = M_2 a_2 + M_1 (c_2 - a_2) \text{ etc..}$$

On a en effet :

$$a \frac{n-1}{n} = a_1$$
$$a \frac{n-1}{n} + b \frac{1}{n} = a + \frac{h}{n} = c_1$$
$$a \frac{n-2}{n} = a_2$$
$$a \frac{n-2}{n} + b \frac{2}{n} = a + \frac{2h}{n} = c_2 \text{ etc...}$$

D'où

$$\frac{b}{n} = c_1 - a_1, \quad b \frac{2}{n} = c_2 - a_2 \text{ etc...}$$

On obtient donc facilement N_0, N_1, N_2 ... par une intégration; on projette les sommets A, B, C, D du polygone connu (fig. 312) sur la droite $x_1 = 1$; on tire les rayons $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$. Le rayon $O\alpha$ détermine le premier sommet A'. Le sommet B' s'obtient en menant OA''B', intégrale des ordonnées M_1 et M_0 sur les segments a_1 et $c_1 - a_1$, et ainsi de suite. On trouve le polygone A'B'C'D'E'. Réciproquement connaissant le polygone A'B'C'D'E', on peut déterminer le polygone ABCD.

743. Exemples. — 1° On donne (fig. 313) les trois points A, B, C d'une parabole du second degré; en prenant *ac* comme unité, on est conduit à tracer la droite CD. Projetons E en α, AFC est le polygone d'intégration cherché. Nous avons déjà donné un grand nombre d'autres solutions de ce problème.

2° On donne (fig. 314) les 4 points A, B, C, D d'une parabole du troisième degré. Transportons l'origine au point A; la transformée par division des ordonnées par les abscisses, est une parabole du second degré passant par les 3 points EC'D, dont on trouve facilement le polygone d'intégration EFD. De ce polygone EFD, on déduit le polygone DHG, dont l'extrémité a la même abscisse que le point A. On opère la multiplication en projetant G et H en α, β; les sommets M et N du polygone cherché se trouvent sur les rayons $A\alpha$ et $A\beta$.

3° On donne deux points A et F, les dérivées et dérivées secondes en ces deux points; la parabole est du cinquième degré. Dans ce cas, on peut trouver immédiatement le polygone d'intégration sans aucune transformation. Soient ABCDEF le polygone cherché, A'B'C'D'E' et A''B''C''D'' les polygones relatifs à la dérivée première et à la dérivée seconde. On connaît les points A'', A', A; donc par intégration on peut tracer A'B' et ABC. De même on connaît D'', E', F, on peut tracer D'E' et DEF. Il suffit de joindre CD pour compléter le polygone d'intégration.

Cette construction si simple s'applique à tous les cas où l'on détermine une parabole par deux ordonnées et un nombre suffisant de dérivées; on détermine tous les côtés en partant des deux extrémités, sauf un côté intermédiaire qui est déterminé par ses deux extrémités.

4° On donne un point A, deux points B et C, un nombre suffisant de dérivées aux points B et C. En suivant la méthode précédente, on trace tous les côtés, sauf deux, du polygone d'intégration compris entre les points B et C. On transporte l'origine en A; pour la transformée par division, on détermine tous les côtés des polygones d'intégration sauf un seul; le problème est résolu.

744. Autre construction. — L'équation du polygone d'intégration est de la forme :

$$y = M_0\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-1} + M_1(n-1)\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-2}\frac{x}{h} + \cdots$$

Exprimons les conditions du problème; on connaît certaines ordonnées $y_1, y_2, y_3\ldots$ et certaines dérivées. On trouve des équations linéaires qui permettent de trouver les inconnues $M_0, M_1, M_2\ldots$; on peut construire ces inconnues en les considérant comme les ordonnées de centres de distances proportionnelles. Les calculs ne sont simples que pour le cas où les ordonnées connues sont équidistantes et pour le deuxième et le troisième degré.

Pour le deuxième degré, la construction du polygone d'intégration est évidente. Soit à déterminer (fig. 316) la parabole du troisième degré passant par les points ABCD; les pieds des ordonnées de ces points sont équidistants. Divisons chacun des intervalles compris entre les ordonnées en trois parties égales. Tirons les droites EB et FC que nous prolongeons jusqu'en H et K. En tirant HK, nous obtenons le côté MN; le polygone d'intégration cherché est AMNB.

Supposons le problème résolu; soient A, M, N, D les

ordonnées du polygone d'intégration cherché; l'équation de la parabole est de la forme :

$$y = A\left(1-\frac{x}{h}\right)^3 + 3M\frac{x}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 + 3N\left(\frac{x}{h}\right)^2\left(1-\frac{x}{h}\right) + N\left(\frac{x}{h}\right)^3.$$

Exprimons que la courbe passe par les points :

$$(0, y_0),\quad \left(\frac{h}{3}, y_1\right),\quad \left(\frac{2h}{3}, y_2\right),\quad (h, y_3);$$

on trouve :

$$y_0 = A$$

$$y_1 = A\frac{8}{27} + M\frac{4}{9} + N\frac{2}{9} + D\frac{1}{27}$$

$$y_2 = A\frac{1}{27} + M\frac{2}{9} + N\frac{4}{9} + A\frac{8}{27}$$

$$y_3 = D.$$

Eliminons A et D, on obtient :

$$\frac{27y_1 - 8y_0 - y_3}{18} = \frac{2M+N}{3} \qquad (1)$$

$$\frac{27y_2 - 8y_3 - y_0}{18} = \frac{2N+M}{3}. \qquad (2)$$

Les ordonnées des points E et F sont données par les formules :

$$E = \frac{8y_0 + y_3}{9}$$

$$F = \frac{8y_3 + y_0}{9}.$$

En introduisant ces valeurs dans les équations (1) et (2), il vient :

$$\frac{3y_1 - E}{2} = \frac{2M+N}{3} \qquad (3)$$

$$\frac{3y_2 - F}{2} = \frac{2N+M}{3}. \qquad (4)$$

Soient H, K, les ordonnées des points qui divisent MN en trois parties égales ; les seconds membres des équations (3) et (4) représentent ces ordonnées; on a donc :

$$H = \frac{3y_2 - E}{2}, \quad K = \frac{3y_1 - F}{2}.$$

Ces formules justifient la construction que nous avons indiquée.

755. Méthode des fausses positions. — On donne trois points A, B, C, des dérivées en B et en C, en nombre suffisant. Le polygone d'intégration compris entre les points B et C est connu sauf deux côtés intermédiaires. Si on se donne arbitrairement la direction d'un des côtés inconnus, on pourra voir si la courbe passe par le point A, en construisant le polygone compris entre B et l'ordonnée du point A. En faisant varier la direction prise arbitrairement du côté inconnu, toutes les lignes de construction pivotent autour de points fixes. Connaissant le pivot de la tangente qui doit passer par A, on peut tracer cette tangente et déterminer le polygone cherché.

Lorsque l'on donne plus de trois points, on doit se donner plusieurs directions arbitrairement, et il faut plus de deux fausses positions. On suit une marche analogue à celle qui nous a permis de résoudre un système quelconque d'équations du premier degré (voyez notre note sur ce sujet).

Nous avons déja appliqué cette méthode des fausses positions au numéro 684 (remarques diverses), dans le cas d'une parabole du troisiéme degré. Lorsqu'il y a plus de 3 points, les constructions sont assez longues.

Deuxième méthode.

756. Construction. — Soit à construire une parabole de degré $n-1$ passant par n points $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)\ldots(x_n y_n)$.

Nous considérons la méthode du numéro 94, dont nous venons de donner la généralisation (741), comme la méthode

la plus simple ; mais celle que nous allons exposer nous permettra d'établir rapidement la formule de Lagrange.

Construisons d'abord une parabole de degré $n-1$ passant par les points $(x_1\ y_1)$, (x_2, o), $(x_3\ o)\ldots (x_n, o)$; en d'autres termes, supposons que toutes les ordonnées connues s'annulent, sauf une d'entre elles y_1. L'équation de cette parabole est de la forme :

$$y = A(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)$$

car, en égalant l'ordonnée à zéro, on droit trouver une équation de degré $n - 1$ ayant pour racines x_2, $x_3\ldots x_n$. Déterminons le paramètre A, en exprimant que la parabole passe par le point $(x_1 y_1)$; on trouve :

$$y_1 = A(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n).$$

L'équation de la parabole devient en éliminant A :

$$\frac{y}{y_1} = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)}.$$

Soient (fig. 317) a, b, c, d les points qui ont pour abscisses $x_1\ x_2\ x_3\ x_n$; $Aa = y_1$; m le point d'abscisse x ; on veut construire y, en Mm. A cet effet, remarquons que l'équation précédente indique que l'on a :

$$\frac{Mm}{Aa} = \frac{mb}{ab} \times \frac{mc}{ac} \times \frac{md}{ad}.$$

De là résulte la construction suivante : tirons bA jusqu'en M' ; ramenons M'm en Na ; tirons cN jusqu'en M'' ; ramenons M''m en N'a ; tirons dN' jusqu'en M ; M est le point cherché. En effet, on a successivement :

$$\frac{M'm}{Aa} = \frac{mb}{ab}$$

$$\frac{M''m}{Na} = \frac{mc}{ac}$$

$$\frac{Mm}{N'a} = \frac{md}{ad}.$$

Multiplions ces égalités membre à membre et remarquons que $M'm = Na$, $M''m = N'a$; on trouve :

$$\frac{Mm}{Aa} = \frac{mb}{ab} \cdot \frac{mc}{ac} \cdot \frac{md}{ad}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Une construction analogue permet de trouver la tangente en un point quelconque A de la parabole; il suffit de supposer ma infiniment petit. On est conduit à prendre $a\alpha$ arbitrairement et à mener $A\beta\gamma\delta\varepsilon T$ de telle façon que $A\beta$, $\gamma\delta$, εT soient parallèles aux droites Ab, Ac, Ad. Cette construction que l'on peut vérifier par les méthodes infinitésimales usuelles, s'obtient instantanément par notre méthode des limites relatives (voyez notre cours de statique).

Nous venons de supposer que toutes les ordonnées s'annulent sauf y_1; nous pouvons de même supposer que toutes les ordonnées s'annulent, sauf y_2 et ainsi de suite. Nous construisons ainsi $n - 1$ paraboles partielles. Ajoutons les ordonnées de toutes ces paraboles; nous trouverons évidemment une nouvelle parabole de degré $n - 1$, car la somme de plusieurs fonctions entières du degré $n - 1$ est encore une fonction entière du degré $n - 1$. On reconnaît facilement que cette parabole totale satisfait à toutes les conditions du problème. En effet, pour une abscisse donnée x_3, l'ordonnée de la parabole s'obtient en ajoutant n ordonnées qui sont toutes nulles, sauf y_3. Donc la parabole passe par le point $(x_3 y_3)$ et comme on démontre de la même manière qu'elle passe par tous les autres points donnés, le problème est résolu.

757. Formule de Lagrange. — L'ordonnée de l'une des paraboles partielles que nous venons de construire s'exprime par la formule :

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)}.$$

En ajoutant les ordonnées des paraboles partielles, on trouve une parabole dont l'équation est :

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots$$

C'est la formule de Lagrange :

On peut la mettre sous une autre forme, en introduisant la fonction :

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Cette fonction représente l'ordonnée de l'une des paraboles de degré n passant par les points $(x_1, o)(x_2, o)\cdots(x_n, o)$.

L'équation de l'une des paraboles partielles est alors de la forme :

$$z = A\frac{f(x)}{x-x_i}.$$

Exprimons qu'elle passe par le point $(x_i y_i)$; on a :

$$y_i = A\left[\frac{f(x)}{x-x_i}\right]_{x=x_i} = Af'(x_i).$$

En éliminant le paramètre A, on trouve pour la parabole partielle

$$z = \frac{y_i}{f'(x_i)}\frac{f(x)}{x-x_i}$$

et pour la parabole totale :

$$y = \sum_1^n \frac{y_i}{f'(x_i)}\frac{f(x)}{x-x_i}.$$

Soit $y = F(x)$, on a :

$$F(x) = \sum_1^n \frac{F(x_i)}{f'(x_i)}\frac{f(x)}{x-x_i}. \qquad (1)$$

758. Décomposition des fractions rationnelles. — Nous utiliserons plus loin la formule de décomposition d'une fraction rationnelle; nous la rappellerons au lecteur, en la déduisant de la formule précédente.

Soit : $F(x)$ une fonction entière quelconque,

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

En divisant Fx, par $f(x)$ on trouvera pour reste une fonction de degré $(n - 1)$ et l'on a :

$$F(x) = Q.f(x) + R(x).$$

On trouve immédiatement :

$$F(x_i) = R(x_i).$$

En appliquant la formule (1) à la fonction $R(x)$ on trouve :

$$R(x) = \Sigma \frac{R(x_i)}{f'(x_i)} \frac{f(x)}{x - x_i} = \Sigma \frac{F(x_i)}{f'(x_i)} \frac{fx}{x - x_i}.$$

La valeur de $F(x)$ devient :

$$F(x) = Q.fx + \sum_1^n \frac{F(x_i)}{f'(x_i)} \frac{f(x)}{x - x_i}.$$

D'où

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \sum_1^n \frac{F(x_i)}{f'(x_i)} \frac{f(x)}{x - x_i}. \qquad (2)$$

C'est la formule de décomposition donnée dans les traités d'algèbre.

759. Généralisation. — On demande de construire une parabole $y = F(x)$ de degré $(n - 1)$, connaissant un nombre suffisant d'ordonnées et de dérivées. On donne, par exemple,

$$\begin{array}{l} F(x_1), \quad F'(x_1) \cdots F^{(\alpha-1)}_{(x_1)} \\ F(x_2) \quad F'(x_2) \cdots F^{\beta-1}_{(x_2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F(x_k) \quad F'(x_k) \cdots F^{\lambda-1}(x_n) \\ \alpha + \beta + \cdots \lambda = n. \end{array}$$

Introduisons la fonction :

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_k)^\lambda.$$

C'est l'équation de l'une des paraboles de degré n satis-

faisant aux n conditions dans l'hypothèse où toutes les ordonnées et dérivées connues soient nulles ; car si $f(x_1)$, $f'(x_1)$, $\cdots f^{\alpha(-1)}_{(x_1)}$ sont nulles, l'équation $f(x) = 0$ a α racines égales à x_1 et le même raisonnement s'applique à toutes les abscisses données.

Montrons comment on peut construire une parabole partielle de degré $n - 1$ satisfaisant aux n conditions précédentes, mais en supposant que toutes les ordonnées et dérivées s'annulent excepté les ordonnées et dérivées pour l'abscisse x_1. En égalant l'ordonnée de cette parabole partielle à zéro, on doit trouver β racines x_2, γ racines x_3,... λ racines x_k ; si donc nous posons :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)^\alpha} = (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_k)^\lambda,$$

l'équation de la parabole partielle est de la forme :

$$u = \psi(x)\,\varphi(x).$$

La fonction $\varphi(x)$ est de degré $n - \alpha$; la fonction u est de degré $n - 1$; donc la foncton $\psi(x)$ est de degré $n - 1 - (n - \alpha) = \alpha - 1$. Il faut α conditions pour déterminer $\psi(x)$: ces conditions s'obtiennent en exprimant que pour $x = x_1$,

$$u_1 = F(x), \quad u'_1 = F'(x_1) \cdots u^{(\alpha-1)}_1 = F^{(\alpha-1)}_{(x_1)}.$$

Si on met ψx sous la forme $Ax^{\alpha-1} + Bx^{\alpha-2} + \cdots$, on déterminera les coefficients $A_1 B_1 \ldots$ par les équations précédentes. Mais on peut aussi déterminer $\psi(x)$ en calculant

$$\psi(x_1), \quad \psi'(x_1), \quad \psi''(x_1) \cdots \psi^{(\alpha-1)}_{(x_1)}.$$

De l'équation

$$u = \psi(x) \cdot \varphi(x),$$

on tire :

$$\psi(x_1) = \frac{u_1}{\varphi(x_1)} = \frac{F(x_1)}{\varphi(x_1)}.$$

Prenons les $\alpha - 1$ premières dérivées de l'expression

$\frac{u_1}{\varphi(x)_1}$, que nous considérons comme un produit $u_1 v_1$, et écrivons au lieu de $u_1\, u_1'\, u_1'' \cdots u_1^{(\alpha-1)}$, leurs valeurs $F(x_1)$, $F'(x_1)$, $F''x_1$, $\cdots F_{(x_1)}^{(\alpha-1)}$. Nous obtiendrons le même résultat que si l'on prenait les dérivées de $\frac{F(x_1)}{\varphi(x_1)} = v_1 F(x_1)$. On trouve :

$$\psi(x_1) = v_1 F(x_1)$$
$$\psi'(x_1) = v_1' F(x_1) + v_1 F'(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_{(x_1)}^{(\alpha-1)} = v_1^{(\alpha-1)} F(x_1) + (\alpha-1)\, v_1^{(\alpha-2)} F'(x_1) + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2} v_1^{(\alpha-3)} F''(x_1) + \cdots + v_1 F_{(x_1)}^{(\alpha-1)}.$$

On a alors :

$$\psi(x) = \psi(x_1) + (x - x_1)\psi'(x_1) + \frac{(x-x_1)^2}{1.2}\psi''(x_1) \cdots + \frac{(x-x_1)^{\alpha-1}}{1.2 \ldots (\alpha-1)} \psi_{(x_1)}^{(\alpha-1)}.$$

La construction des valeurs de $\psi(x_1)$, $\psi'(x_1) \cdots$ est difficile; mais connaissant ces valeurs (on peut les calculer) on obtiendra $\psi(x)$ par intégration et $u = \psi(x)$. $\varphi(x)$ par une série de multiplications.

En raisonnant pour les abscisses x_2, $x_3 \cdots x_4$, comme pour l'abscisse x_1, on trouvera les autres paraboles partielles; en ajoutant les ordonnées de ces paraboles partielles, on trouvera la parabole cherchée. Son équation est de la forme :

$$y = \Sigma \psi(x)\, \varphi(x)$$

ou

$$y = \Sigma \psi(x) \frac{f(x)}{(x - x_1)^\alpha}.$$

La fonction $\psi(x)$ est déterminée par $\psi(x_1)$, $\psi'(x_1)$ $\psi^{\alpha-1}(x_1)$; ses valeurs sont les mêmes que si $\psi(x)$ était égal à

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)}.$$

On a aussi :

$$F(x) = \Sigma\left[\frac{\psi(x_1)}{(x-x_1)^{\alpha}} + \frac{\psi' x_1}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \frac{1}{1.2}\,\frac{\psi''(x_1)}{(x-x_1)^{\alpha-2}} + \cdots + \frac{1}{1.2.^{(\alpha-1)}}\,\frac{\psi^{(\alpha-1)}(x_1)}{(x-x_1)^{\alpha-2}}\right] f(x) \qquad (3)$$

formule dans laquelle on peut supposer

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{\varphi(x)}.$$

C'est la généralisation de la formule de Lagrange.

Nous déduirons de cette formule la décomposition d'une fraction rationnelle dans le cas où le dénominateur est de la forme

$$f(x) = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta} - (x-x_k)^{\lambda}.$$

Soit $F(x)$ une formule entière quelconque; en divisant par $f(x)$, on obtient :

$$F(x) = Qf(x) + R(x).$$

La fonction $R(x)$ peut s'exprimer par la formule (3); on trouve alors :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \Sigma\left[\frac{\psi(x_1)}{(x-x_1)^{\alpha}} + \frac{\psi'(x_1)}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{\psi^{(\alpha-1)}x_1}{1.2\ldots(\alpha-1)(x-x_1)^{\alpha-1}}\right]. \qquad (4)$$

On suppose

$$\psi(x) = \frac{R(x)}{\varphi(x)}.$$

Or la différence $F(x) - R(x)$ contient $(x-x_1)^{\alpha}$ comme facteur; donc les deux fonctions et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha - 1$ sont les mêmes; on peut donc aussi poser :

$$\psi(x) = \frac{Fx}{\varphi(x)}.$$

Les valeurs de $\psi(x_1)$, $\psi'(x_1)\ldots \psi^{(\alpha-1)}_{(x_1)}$ ne changeront pas par cette nouvelle hypothèse.

Remarques. — La parabole de degré $n-1$ satisfaisant à n conditions du genre de celles que nous avons examinées est unique; car s'il en existait deux, la différence des ordonnées serait une fonction entière de degré $n-1$ qui aurait n racines : α racines x_1, β racines x_2, etc. Donc cette différence doit être identiquement nulle.

De même il n'existe qu'une seule manière de décomposer la fraction rationnelle par une formule du genre de la formule (4). Car si x tend vers l'infini, la partie entière donne les termes infiniment grands; ces termes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x; un développement de cette espèce est unique. Si $x-x_1$ est infiniment petit, on trouve un autre développement qui doit être unique et ainsi de suite.

Troisième méthode.

760. Construction. — On demande de construire une parabole de degré $(n-1)$ passant par les points (x_1y_1) $(x_2y_2)\cdots(x_ny_n)$. Soient (fig. 318) A, B, C, D les points donnés. Menons d'abord la droite AB; cette droite ne passe pas par le point C; l'erreur commise est CC'. Portons cette erreur en C''c, et menons une parabole du second degré par les trois points a, b, C''; en ajoutant les ordonnées de la droite AB et de la parabole abC'', on trouve la parabole ABCD'. Cette parabole ne passe pas par le quatrième point D; l'erreur commise est D'D. Portons cette erreur en D''d et menons une parabole du troisième degré passant par les points a, b, c D''. En ajoutant les ordonnées de la parabole ABCD' et de la parabole abcD'', on trouvera une parabole du troisième degré passant par les quatre points A, B, C, D. On continue de la même manière.

Chacune des paraboles partielles a une équation de la forme :

$$y = A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

(Nous supposons qu'il s'agit de la parabole *abc*D'').

Elle passe par un point connu D''. On la construit par points en suivant la méthode exposée au numéro 756.

761. Formule de Newton. — La construction précédente est moins simple que celle du numéro 94, mais elle est remarquable parce qu'elle permet de retrouver la formule de Newton.

L'équation de la droite AB est :

$$y = y_1 + z_2 (x - x_1), \quad z_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

L'équation de la parabole *ab*C'' est de la forme :

$$y = u_3 (x - x_1)(x - x_2).$$

Déterminons u_3 en exprimant que la parabole que l'on obtient en ajoutant les ordonnées de AB et de *ab*C'' passe par C; on trouve :

$$y_3 = y_1 + z_2 (x_3 - x_1) + u_3 (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

soit

$$z_3 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1};$$

on trouve :

$$u_3 = \frac{z_3 - z_2}{x_3 - x_2}.$$

On continue de la même manière.

L'équation de la parabole totale est de la forme :

$$y = y_1 + z_2(x - x_1) + u_3(x - x_1)(x - x_2) + v_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots$$

On a :

$$z_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad u_3 = \frac{z_3 - z_2}{x_3 - x_2}, \quad v_4 = \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3} \cdots$$

Nous avons déjà montré que la formule de Newton pouvait se déduire de la méthode du numéro 94; mais alors il y avait certains calculs à effectuer. Dans la méthode que

nous venons d'exposer on construit fidèlement chacun des termes de la formule de Newton et on ajoute chaque nouveau terme à la somme des précédents.

762. Coefficients. — Les coefficients z_2, z_3, z_4... u_3, u_4... v_4... sont les ordonnées des différentes transformées que l'on considère en appliquant la méthode du numéro 94.

On peut écrire :

$$z_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1}$$

$$z_3 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{\Delta_3 y_1}{\Delta_3 x_1} \text{ etc.}$$

On a de même :

$$u_3 = \frac{z_3 - z_2}{x_3 - x_2} = \frac{\Delta_3 z_2}{\Delta_3 x_2} = \frac{\Delta_3}{\Delta_3 x_\infty} \cdot \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1}$$

$$u_4 = \frac{z_4 - z_2}{x_4 - x_2} = \frac{\Delta_4 z_2}{\Delta_4 x_2} = \frac{\Delta_4}{\Delta_4 x_2} \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} \text{ etc.}$$

On a aussi :

$$v_4 = \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3} = \frac{\Delta_4 u_3}{\Delta_4 x_3} = \frac{\Delta_4}{\Delta_4 x_3} \frac{\Delta_3}{\Delta x_2} \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} \text{ etc.}$$

La formule de Newton peut donc s'écrire, en posant :

$$x - x_1 = \Delta x_1$$
$$x - x_2 = \Delta x_2 \text{ etc.}$$

$$y = y_1 + \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} \Delta x_1 + \frac{\Delta_3}{\Delta_3 x_2} \cdot \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 + \cdots$$

Les coefficients peuvent encore être considérés à un autre point de vue. Si, par exemple, nous considérons les trois premiers termes, on obtient une parabole du second degré passant par les trois premiers points :

$$y = y_1 + z_2 (x - x_1) + u_3 (x - x_1)(x - x_2).$$

Le terme de degré le plus élevé est $u_3 x^2$; donc la dérivée

seconde de l'ordonnée de cette parabole est $A'' = 1.2.\alpha_3$; d'où :

$$\alpha_3 = \frac{A''}{1.2}.$$

On démontrerait de la même manière que l'on a :

$$\alpha_4 = \frac{A'''}{1.2.3},$$

A''' étant la dérivée constante de l'ordonnée de la parabole du troisième degré passant par les quatre premiers points. On peut donc encore écrire la formule de Newton sous la forme :

$$y = y_1 + A'(x - x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\frac{A''}{1.2} +$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\frac{A'''}{1.2.3} + \cdots$$

Chacun des coefficients tels que $A^{(i)}$ est la dérivée constante de la parabole passant par les $i + 1$ premiers points. Pour avoir une dérivée constante, il faut évidemment prendre la dérivée d'ordre i.

En comparant les deux valeurs des coefficients, on trouve la formule :

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+1}x} \cdot \frac{\Delta_i}{\Delta_i x_{i-1}} \cdots \frac{\Delta_3}{\Delta_3 x_2} \cdot \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} = \frac{A^{(i)}}{1.2.3 \ldots i}.$$

Cette formule donne au moyen de différences, la dérivée d'ordre i d'une parabole de degré i passant par $i + 1$ points.

763. Généralisation. — Tracer une parabole connaissant un certain nombre d'ordonnées et de dérivées de divers ordres de ces ordonnées. Supposons pour fixer les idées que l'on donne 1° le point A (fig. 319) et deux dérivées, c'est-à-dire $(x_1 y_1 y'_1 y''_1)$; 2° le point B et deux dérivées, c'est-à-dire $x_4 y_4 y'_4 y''_4$ et ainsi de suite. Nous mettons l'indice 4 au second point parce que l'on peut considérer la parabole comme

la limite d'une parabole qui passerait par 3 points infiniment voisins ayant pour limite x_1, y_1 ; donner $y_1 y'_1 y''_1$ c'est assujettir la parabole à avoir un contact du second ordre avec la parabole du second degré déterminée par $y_1 y'_1 y''_1$; cela revient à faire passer la parabole cherchée par trois points (x_1, y_1) $(x_2 y_2)$ $(x_3 y_3)$ de cette parabole du second degré, et à faire converger les points $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ vers le point $(x_1 y_1)$.

Pour simplifier le langage nous dirons donc que la parabole cherchée doit passer par trois points $(x_1 y_1)$, trois points $(x_2 y_2)$ etc. On devine alors immédiatement comment il faut généraliser les constructions et les considérations qui précèdent.

Construisons d'abord, par une intégration ou multiplication, une parabole passant par les trois premiers points A :

$$y = y_1 + (x - x_1) y'_1 + (x - x_1)^2 \frac{y''}{2}.$$

Cette parabole ne passe pas par le quatrième point B ; l'erreur commise est BB' ; portons cette erreur en B''b et traçons une parabole du troisième degré qui ait trois points a sur l'axe des x et qui passe par B'' ; cette parabole a une équation de la forme :

$$y = v_4 (x - x_1)^3.$$

On la construit par la méthode du numéro 756 qui subit une légère modification. Ajoutons les ordonnées des deux paraboles partielles déjà tracées, nous trouverons une parabole passant par les 4 premiers points ou réalisant les quatre premières conditions y_1, y'_1, y''_1, y_4. Elle ne réalise pas la cinquième condition y'_4 ; l'erreur commise α peut être déterminée graphiquement ou par calcul. Menons une parabole du quatrième degré ayant quatre points sur l'axe des x, un point $b(x_4, o)$ et trois points $a(x_1, o)$ et ayant au point b une dérivée α ; son équation est de la forme :

$$y = v_5 (x - x_1)^3 (x - x_4).$$

On détermine w_5 par la condition α. On ajoute les ordonnées de cette parabole aux ordonnées de la parabole précédente réalisant les quatre premières conditions et on a réalisé les cinq premières conditions. On corrige ensuite l'erreur commise dans la valeur de y_4'' et on continue de la même manière.

Si on exprime par l'analyse l'ordonnée de la parabole totale, on trouve une formule qui est la généralisation de la formule de Newton. La meilleure manière de découvrir la loi des coefficients et de généraliser les considérations du numéro précédent, c'est de supposer d'abord que l'on donne n points en remplaçant chaque dérivée par un point infiniment voisin du point donné. En passant à la limite on généralise toutes les propriétés et formules précédentes. Dans les formules où l'on emploie les différences, il suffit de remplacer Δ par d pour les différences infiniment petites.

Ainsi, par exemple, la formule

$$w_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta_5 x_4}\,\frac{\Delta_4}{\Delta_4 x_3}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_3 x_2}\,\frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1}$$

deviendrait :

$$w_5 = \frac{d_5}{d_5 x_4}\,\frac{\Delta_4}{\Delta_4 x_3}\,\frac{d_3}{d_3 x_2}\,\frac{d_2 y_1}{d_2 x_1}.$$

Cette formule est plus curieuse qu'utile; les symboles tels que $\frac{d_5}{d_5 x_4}$ signifient limite de $\frac{\Delta_5}{\Delta_5 x_4}$ et la recherche de ces limites conduit précisément aux mêmes calculs que ceux que l'on rencontre en appliquant la méthode précédente ou mieux celle du numéro 741.

Ainsi, par exemple, les trois premiers points sont :

$$y_1 \quad y_1 + \Delta y_1 \quad y_1 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_1$$

On a :

$$\frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} \quad \frac{\Delta_3 y_1}{\Delta_3 x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} + \frac{1}{2}\frac{\Delta^2 y_1}{(\Delta x_1)^2}\Delta x_1$$

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_3 x_2}\cdot\frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} = \frac{1}{2}\frac{\Delta^2 y_1}{(\Delta x_1)^2}$$

D'où

$$\frac{d_3}{d_3x_4}\frac{d_2y_4}{d_2x_4}=\frac{1}{2}y''_4.$$

La seconde interprétation des coefficients de la formule de Newton est encore applicable; ainsi w_5 est la dérivée quatrième de la parabole passant par les 5 premiers points, cette dérivée étant divisée par le produit 1.2.3.4.

Quatrième méthode.

764. On peut se proposer de représenter l'échelle des valeurs d'une fonction entière pour une série de valeurs données de la variable; on dit alors que la fonction est représentée par une ponctuelle.

Nous avons montré au numéro 253 comment on construit cette ponctuelle, lorsque l'on donne les coefficients a, b, c,... d'une fonction $ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots$. La même méthode est applicable au cas où l'on donne n valeurs $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)\cdots f(x_n)$ de la fonction.

Soit, par exemple, une fonction du troisième degré; on donne (fig. 320) les valeurs oA, oB, oC, oD de la fonction pour les valeurs de x représentées en oa, ob, oc, od. La fonction

$$z=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

est une fonction entière du deuxième degré; on peut déterminer les valeurs de la fonction z pour les valeurs x_2, x_3, x_4. Menons dans ce but l'axe Az perpendiculairement à OD; soit Po = 1; menons BB', CC', DD' parallèlement à P'b, P'c, P'd; on reconnaît facilement que l'on a divisé AB, AC, AD ou $f(x)-f(x_1)$ par ab, ac, ad ou $x-x_1$; c'est l'application de la division graphique, mais on peut justifier facilement cette construction par la géométrie

élémentaire; on a, en effet,

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AB'}{1}$$

à cause de la similitude des triangles BAB′ et baP′; on a donc :

$$AB' = \frac{AB}{ab} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = z_2.$$

On démontre de la même manière que

$$AC' = z_3 \quad AD' = z_4.$$

Soit $z = \psi(x)$; la fonction

$$u = \frac{\psi(x) - \psi(x_2)}{x - x_2}$$

est une fonction du premier degré que l'on peut déterminer par les valeurs u_3, u_4 de u pour $x = x_3$, $x = x_4$. Traçons B′u perpendiculairement à Az; menons C′C″, D′D″ perpendiculairement aux rayons P″c, P″d; on trouve :

$$B'C'' = u_3 \quad B'D'' = u_4.$$

Enfin la fonction

$$v = \frac{u - u_3}{x - x_3}$$

est constante; on l'obtient en menant C″v perpendiculairement à B′u, et D″D‴ parallèlement à P‴d.

En d'autres termes, nous effectuons les mêmes opérations que dans la méthode du numéro 94, mais en disposant les constructions de manière à obtenir des échelles de valeurs au lieu de courbes.

Soit maintenant à chercher la valeur de la fonction pour une valeur $x = oe$ de la variable x. On effectue alors les opérations inverses des précédentes; c'est-à-dire que l'on multiplie par ce, be, ae; on trouve :

$$u = B'E'', \quad z = AE', \quad y = OE.$$

Les droites D″E″, E″E′, E′E sont respectivement parallèles ou perpendiculaires aux rayons P‴e, P″e, P′e.

La même méthode s'applique au cas où l'on donne des valeurs de la fonction et de ses dérivées; on traduit la méthode du numéro 741 par des constructions graphiques analogues aux précédentes.

NOTE II.

Théorème sur l'influence d'une charge mobile.

765. Théorème des charges décrivées. — Une poutre, droite ou courbe, supporte une charge verticale; la charge, par unité de longueur mesurée horizontalement, est donnée par la fonction $p = f(x)$; cette charge est mobile; les choses se passent comme si la poutre se déplaçait sous les charges; l'abscisse u d'un point de la poutre est variable. Les dérivées

$$\frac{d\mathrm{K}}{du}, \quad \frac{d\mathrm{M}}{du}, \quad \frac{dy}{du}, \quad \frac{dt}{du} \text{ etc.},$$

de tous les éléments : efforts tranchants, moments fléchissants, flèches de déformation, tensions moléculaires, ces dérivées étant prises en restant dans une même section de la poutre, s'obtiennent en calculant ces mêmes éléments K, M, y, t dans l'hypothèse où la même poutre serait sollicitée par une charge fictive représentée par

$$p' = \frac{dp}{dx}.$$

L'effet de cette charge fictive doit être calculé dans l'hypothèse ou la poutre peut satisfaire sans déformation à toutes les conditions géométriques qui résultent des appuis et des encastrements.

Démonstration. — Soient (fig. 321) : AB la poutre dans la position considérée; du = AA′ = BB′ le déplace-

ment de la poutre dans le sens de l'axe des x; DE la courbe des charges, $p = f(x)$; M une section $z = AM$, qui vient se placer en M′ après le déplacement $du = MM'$. Dans la position primitive la charge en M était p; après le déplacement la charge dans la même section venue en M′ est $p + \frac{dp}{dx} du$; donc l'influence du déplacement de la poutre est de produire dans la même section z une augmentation de charge égale à $\frac{dp}{dx} du$. En vertu du principe de l'indépendance des effets des forces (543, 670), nous obtiendrons les effets dK, dM, dy, dt de cette augmentation de charge, en supposant la poutre sollicitée uniquement par la charge $\frac{dp}{dx} du$ et en supposant les déformations initiales égales à zéro. En vertu du même principe, si nous multiplions la charge $\frac{dp}{dx} du$ par $1 : du$, les effets seront multipliés par le même nombre; donc la charge $\frac{dp}{dx}$ produira les effets qui représentent

$$\frac{d\mathrm{K}}{du}, \quad \frac{d\mathrm{M}}{du}, \quad \frac{dy}{du}, \quad \frac{dt}{du};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Extension. — Ce théorème s'applique aussi aux cas où la charge présente des discontinuités Δp ou est constituée par des forces isolées; il suffit d'y apporter les modifications suivantes.

Soit $EF = \Delta p$ une discontinuité dans la valeur de la charge. Un élément $NN' = du$, vient se placer en N′N″; il était sollicité par une force $p.du$; après le déplacement, il est sollicité par une force $(p + \Delta p)du$; il faut donc introduire une force nouvelle $\Delta p.du$. Pour obtenir les dérivées des éléments, il faut multiplier par $1 : du$, on trouve Δp.

La charge supplémentaire par unité de longueur serait $\lim \frac{\Delta p}{du}$; c'est l'infini. La force additionnelle totale qui sollicite l'élément NN′ qui se réduit à zéro est Δp. Donc il faut au point N introduire une charge concentrée égale à Δp. On peut exprimer ce résultat en disant que la charge fictive qui donne les dérivées des éléments a pour intégrale première ou lieu des efforts tranchants la courbe p avec toutes ses discontinuités. En effet la courbe p est l'intégrale de p', les charges concentrées Δp sont représentées par les discontinuités de la courbe p précisément comme il convient d'introduire ces charges concentrées lorsque l'on trace le lieu des efforts tranchants ou l'intégrale première des charges y compris les forces isolées.

Soit P une force isolée agissant au point S; le point S vient en S′. Introduisons en S′ deux forces + P et — P. Si la section S venue en S′ était sollicitée par la force S′P, l'état de sollicitation ne serait pas changé; la force aurait suivi la section dans son mouvement. Il résulte de là que le changement dans l'état de sollicitation est représenté par le couple SP et S′P′; le déplacement de la poutre produit le même effet que l'introduction dans la section S d'un couple isolé dont le moment est Pdu. Il faut multiplier par $1 : du$ pour obtenir les dérivées des éléments; on trouve un moment isolé égal à P. On peut exprimer ce résultat de la manière suivante; construisons l'intégrale première de la courbe p en introduisant les forces isolées P, comme on doit le faire en traçant un lieu d'efforts tranchants. Cette ligne des K est l'intégrale seconde ou lieu des M pour la charge fictive qui produit les dérivées des éléments. En effet, la courbe p est déjà l'intégrale première de la charge fictive; le lieu des K est donc l'intégrale seconde de la charge fictive; les discontinuités du lieu des K représentent précisément les discontinuités du lieu des M produites par les couples isolés tels que P.

Supposons que la charge mobile comprenne un couple isolé ΔM; en déplaçant la poutre de du, on introduit une surface des M égale à $\Delta M du$; en divisant par du, on trouve une surface ΔM concentrée en un point; il en résulte un $\Delta\eta$ brusque égal à ΔM, si on prend $\varepsilon = 1$. La ligne des M avec ses discontinuités est donc encore la ligne des η. On peut considérer ce $\Delta\eta$ comme produit par deux couples égaux, de sens contraire, infiniment grands et sollicitant deux sections infiniment voisines ou comme un système de trois forces en équilibre, infiniment grandes et infiniment voisines.

On trouverait de même qu'un $\Delta\eta$ mobile représente un Δy dans l'épure des dérivées.

En résumé, s'il s'agit d'une poutre droite à une ou plusieurs travées, il suffit de considérer les lignes des p, des K, des M, des η; ces lignes deviennent avec leurs discontinuités les lignes des dérivées

$$\frac{dK}{du}, \quad \frac{dM}{du}, \quad \frac{d\eta}{du}, \quad \frac{dy}{du}$$

pourvu que l'on détermine les lignes de repère dans la nouvelle hypothèse.

Dans une poutre en arc, on sait que la ligne des pressions est une intégrale seconde de la charge, déterminée par les conditions de la déformation. On obtiendra les dérivées des éléments en traçant une ligne de pression fictive; cette ligne est l'intégrale seconde de la charge fictive; c'est donc l'intégrale première de la charge réelle.

Représentation. — Soit (fig. 322) AB la poutre dans une position; un élément (K, M, y, t) est représenté par une courbe ADB. Menons deux parallèles quelconques AA'BB'; la charge est supposée fixe; en traçant des horizontales telles que A'B' on aura l'image de toutes les positions de la poutre par rapport à la charge. Pour chaque position A'B', on aura à considérer une courbe telle que

A′D′B′; c'est la courbe relative à une position de la poutre. Plaçons nous dans une section $d(z = Bd)$; prenons dd' comme ligne de repère; la courbe DD′ représente la variation de l'élément considéré dans une même section; c'est la dérivée de l'ordonnée de cette courbe que l'on trouve par le théorème que nous venons d'exposer; cette courbe est la courbe spéciale à une section. Plaçons-nous en un point de la charge, l'élément varie de Dd à E′e'; la courbe DE est la courbe spéciale à un point de la charge.

On peut encore considérer cette figure à un autre point de vue. L'élément Dd dont il s'agit de représenter la variation est une fonction de deux variables :

$$Dd = t(z,u).$$

On peut la représenter par une surface. La figure tracée d'après les indications précédentes peut être considérée comme une perspective cavalière de cette surface. La variable u est portée perpendiculairement au plan de la figure, elle est représentée en vraie grandeur par la projection horizontale de la droite qui la représente en perspective.

La surface est formée de deux réseaux de courbes : les courbes ordinaires pour une position de la poutre et les courbes spéciales à une section. Les courbes spéciales à un point de la charge forment une troisième série de courbes; mais ces courbes ne peuvent pas être représentées; ces courbes ont pour perspectives des verticales telles que DE′; la courbe DE est le rabattement de cette courbe DE′.

On peut facilement trouver la dérivée de la courbe DE; on a pour toute courbe tracée sur la surface :

$$dt = \frac{dt}{du}du + \frac{dt}{du}dz.$$

Pour rester au même point de la charge, on doit prendre :

$$x = u + z = \text{constante}$$

d'où

$$du = -dz.$$

On a donc :

$$dt = \left(\frac{dt}{dz} - \frac{dt}{du}\right) dz.$$

La dérivée de la courbe DE est donc :

$$Dt = \frac{dt}{dz} - \frac{dt}{du}. \qquad (1)$$

Applications. — Le théorème de la charge dérivée permet de résoudre toutes les questions où il s'agit de chercher la fatigue maxima d'une poutre. Un certain nombre de questions de ce genre ont déjà été résolues; on retrouve immédiatement toutes les solutions déjà connues. On peut en outre aborder des problèmes de ce genre qui n'ont pas encore été examinés.

§ 2. — Charge quelconque sur une poutre sur deux appuis.

765. Les dérivées. — Soient (fig. 323) EF la courbe des charges, AB l'intégrale première. La courbe AB est la courbe des $\frac{dM}{du}$ quand on la rapporte à la ligne repère ordinaire des moments fléchissants, c'est-à-dire à la corde AB. Au point D, on a : $\frac{dM}{du} = 0$. L'épure des $\frac{d^2M}{du^2}$ s'obtient en rapportant la courbe EF à sa corde; on voit que $\frac{d^2M}{du^2}$ est positif. Donc au point D le moment fléchissant passe par un maximum. Remarquons que les coefficients angulaires des cordes DA et DB sont égaux aux ordonnées moyennes de la courbe des charges pour les segments correspondants; on retrouve ainsi le théorème suivant dû à M. Winkeleer : lorsque le moment fléchissant dans une section passe par un maximum, les charges moyennes à droite et à gauche de la section sont égales.

Soit CG la dérivée de la droite AB; les $\frac{dK}{du}$ sont représentés par la courbe EF rapportée à cette droite CG. Aux points H et H', $\frac{dK}{du} = 0$. L'épure des $\frac{d^2K}{du^2}$ montre qu'en H il y a maximum, et qu'en H' il y a minimum. L'ordonnée de la droite CG est la charge moyenne sur toute la poutre; donc l'effort tranchant passe par un maximum ou un minimum dans les sections où la charge est égale à la charge moyenne.

Ces différentes propositions sont démontrées par des calculs assez longs dans un ouvrage de M. C. Nels intitulé : Der einfache Balken auf zwei Endützen.

766. Théorème de Barré. Si on reste au même point de la charge la dérivée du moment fléchissant est donnée par la formule (1) :

$$DM = \frac{dM}{dz} - \frac{dM}{du} = KM - LM = KL.$$

En effet $\frac{dM}{dz}$ est l'effort tranchant; il est déterminé par la courbe AB, si on prend pour ligne de repère la dérivée de la corde du lieu des M. Au point N, on a $DM = 0$; le moment fléchissant passe par un maximum. L'ordonnée moyenne de l'arc AB, est l'ordonnée de la ligne ab; nous trouverons l'abscisse moyenne par une construction connue; cette construction montre que l'abscisse moyenne est l'abscisse du point symétrique du point N par rapport au milieu de la poutre.

Or l'abscisse moyenne de l'arc AB est l'abscisse du point d'intersection des tangentes extrêmes de l'arc correspondant de l'intégrale seconde; c'est donc l'abscisse du centre de gravité des charges qui reposent sur la poutre. De là ce théorème : Le moment fléchissant spécial à un point de la charge passe par un maximum lorsque ce point

est le symétrique du centre de gravité de la charge totale par rapport au milieu de la poutre.

On trouverait de même :

$$DK = \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{du} = p - \frac{dK}{du} = K'L'$$

Cette dérivée représente la charge moyenne; elle est positive dans les cas utiles à considérer.

767. Les courbes spéciales à une section. — Plaçons-nous dans une section z de la poutre; le moment fléchissant est une fonction de la variable u. On peut d'abord obtenir cette fonction par intégration en déterminant les valeurs de $\frac{dM}{du}$. Soit AB la corde de la ligne des K, pour une position de la poutre; T′ la section considérée; en déplaçant la poutre, la corde AB se déplace; le point T′, déterminé par la condition que la projection horizontale de AT′ reste constante et égale à z, décrit une courbe; les ordonnées comprises entre la ligne des K et cette courbe $\beta\alpha$ représentent les valeurs de $\frac{dM}{du}$ dans la même section. Déplaçons la poutre jusqu'au moment où la poutre se trouve tout entière au-delà de la charge; en ce moment on a $M = 0$; le point T′ vient en α. Si on prend cette position comme position initiale de la poutre, on a :

$$M = \int_0^u \frac{dM}{du}\, du = \text{aire } \alpha AT''\beta T'.$$

Il serait peu avantageux de déterminer le moment M en intégrant cette surface; mais cette représentation du moment fléchissant a un grand avantage; elle montre que le moment fléchissant dans la section donnée passera par un maximum lorsque cette section T′ viendra au point β. Pour déterminer la position de la poutre, qui donne dans la section T′ le plus grand moment fléchissant, il suffit de

construire la courbe $\beta T'$ dans les environs du point β, de manière à déterminer ce point; on trouve alors immédiatement (fig. *e*) la position $a'b'$ de la poutre.

La courbe des moments M dans une section T', T, *t* peut aussi s'obtenir par le procédé que nous avons déjà indiqué au numéro 567. On inscrit dans la ligne des M des cordes telles que SR, ayant pour projections les positions diverses de la poutre. Le point T qui correspond à la section considérée décrit une courbe TU. Les ordonnées comprises entre la ligne des M et cette courbe TU représentent les moments fléchissants dans la section considérée. Il est facile de vérifier que cette seconde construction donne le même résultat qu'en intégrant l'aire qui représente le moment fléchissant. En effet, la ligne des M est l'intégrale de la ligne $\alpha A\beta$ qui limite supérieurement l'aire dont il s'agit. Il suffit de vérifier que la courbe TU est l'intégrale de la courbe $T'\beta$. A cet effet, remarquons que si R, S, T, A, B, T' désignent les ordonnées des points représentés par les mêmes lettres, on a :

$$T = \frac{R(l-z) + Sz}{l}.$$

D'où

$$\frac{dT}{du} = \frac{\frac{dR}{du}(l-z) + \frac{dS}{du}z}{l} = \frac{A(l-z) + Bz}{l}.$$

Or

$$T' = \frac{A(l-z) + Bz}{l}.$$

Donc

$$\frac{dT}{du} = T';$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de là un moyen de construire la tangente à la

courbe TU; le coefficient angulaire de cette tangente est l'ordonnée du point T'. Cette tangente peut aussi s'obtenir de la manière suivante. Pour passer de la position SR à une position infiniment voisine, on peut remplacer aux points S et R la ligne des M par ses deux tangentes; cela revient à remplacer la charge totale par sa résultante. Dans cette hypothèse le point T décrit une droite; cela résulte de la valeur de T, trouvée plus haut et de ce que R et S sont des fonctions linéaires de u. On reconnait aussi cette propriété en remarquant que $\frac{dM}{du}$ reste constant, dans cette hypothèse. Cette droite se confond avec la tangente cherchée. On obtiendra cette droite en inscrivant dans l'angle SPR une corde quelconque ayant la poutre comme projection, et en déterminant sur cette corde la position de la section. Si en particulier on place la poutre dans deux positions, telles que les extrémités de la poutre viennent successivement se placer sous la force concentrée P, on trouve les points S', R' de la tangente cherchée. Les projections de S'V et de VR' sont respectivement les segments z, et $l - z$.

Le point de contact q de SR avec son enveloppe est le point où l'on a en restant au même point de la charge DM = 0. Il est donc donné par le théorème de Barré; les points p et q sont symétriquement placés sur la corde SR. L'élément de l'enveloppe peut être considéré comme l'intégrale de l'ordonnée du point N; si donc on déterminait la courbe décrite par le point N, l'enveloppe de la corde SR en serait l'intégrale. Dans le cas d'une force concentrée P, on démontre assez facilement que le point N décrit une droite XY; donc la droite SR enveloppe une parabole. On déduit de là toutes les propriétés de cette enveloppe et de leurs enveloppées.

Considérons les efforts tranchants. On obtiendra la représentation des valeurs de $\frac{dK}{du}$ dans une section, en déplaçant

la poutre et en traçant les différentes positions de la droite GC. Un point de cette droite décrit une courbe; c'est la ligne de repère spéciale à une section; les $\frac{dK}{du}$ sont représentés par les ordonnées de la courbe p, comptées à partir de cette ligne de repère spéciale. On pourrait trouver l'effort tranchant K par l'intégration d'une surface. On obtiendra aussi la représentation des valeurs de K pour une section, en déterminant les positions de la droite A'B' pour les diverses positions de la poutre. Le point de A'B' qui correspond à une section décrit une ligne de repère spéciale; les valeurs de K sont représentées par les ordonnées de la courbe AMB comptées à partir de cette ligne de repère spéciale. Les différents points des droites GC décrivent des courbes identiques; il en est de même des courbes décrites par les points de A'B'. Il est facile de démontrer que celles-ci sont les intégrales des précédentes; on vérifie ainsi que les deux manières de trouver les courbes spéciales des efforts tranchants dans une section conduisent au même résultat. De là résulte un moyen de mener la tangente à la ligne de repère spéciale des K; il suffit d'intégrer l'ordonnée de la ligne de repère des $\frac{dK}{du}$. Or cette ordonnée est l'ordonnée de la droite GC; c'est la charge moyenne sur toute la poutre. Donc tous les points de A'B' décrivent des éléments parallèles à AB. Dans le cas d'une force isolée P, les points de A'B' décrivent des droites parallèles à AB. On obtient ces droites en prenant les positions P''Y et P'X de la droite A'B'. De là résulte immédiatement la propriété annoncée que la droite N décrit la droite XY; car le parallélogramme YANA' reste semblable à lui-même; donc le point N décrit une droite passant par le point Y. On démontre de même qu'elle passe par le point X.

768. Valeurs maxima. — On donne un certain nombre

de sections dans une poutre; on demande de déterminer les valeurs maxima des moments fléchissants et efforts tranchants dans cette section.

1° On construit les lignes de repères spéciales aux sections données pour les valeurs de $\frac{dK}{du}$, $\frac{dM}{du}$; les valeurs cherchées sont représentées par des aires.

2° On construit les lignes de repères spéciales pour les valeurs de K et de M; on cherche les ordonnées maxima au moyen du compas, ou en redressant le lieu et en menant des tangentes horizontales.

3° La véritable méthode pratique est de tracer des fragments des lignes de repère spéciales pour les dérivées $\frac{dM}{du}$ ou $\frac{dK}{du}$, de manière à trouver les positions de la poutre pour lesquelles les valeurs de M ou K passent par un maximum.

On trouve alors immédiatement ces valeurs sans qu'il soit nécessaire de construire les lignes de repère spéciales des M ou des K; on détermine immédiatement le seul point utile de ces lignes. Nous donnerons plus loin (770) un exemple de ce procédé.

On peut même se débarrasser de tracer les fragments de lignes de repère spéciales relatives aux dérivées. Pour une position de la poutre on trouve immédiatement le point D, où le moment fléchissant passe par un maximum. Il suffit de tracer la poutre dans un certain nombre de positions, de manière à obtenir un certain nombre de valeurs maxima de M. On peut construire la courbe des valeurs maxima. On raisonne de la même manière pour les efforts tranchants.

§ 3. — Charge parabolique sur une poutre sur deux appuis.

769. Polygones d'intégration. Lorsque la courbe des charges est formée d'arcs paraboliques, on peut déterminer les intégrales au moyen de polygones d'intégration. Nous allons montrer que l'on peut aussi déterminer les lignes de repère spéciales par leurs polygones d'intégration.

Soient (fig. 324) : ABE la ligne des M ou intégrale seconde de la charge ; AE la corde dont la projection horizontale est la position *ae* de la poutre ; *c* une section donnée de la poutre ; A$\alpha\beta$B, E$\varepsilon\varphi$F les polygones d'intégration qui déterminent la ligne des M de A en B et de E en F. Supposons que les arcs AB et EF aient une même projection horizontale h ; supposons en outre que les deux polygones d'intégration aient le même nombre de côtés ; s'il en était autrement, il serait facile d'obtenir deux polygones d'intégration réalisant ces conditions. Connaissant le polygone d'intégration d'un arc parabolique, on peut en effet en trouver un autre ayant plus ou moins d'étendue. Si les deux arcs paraboliques étaient de degrés différents, on peut toujours considérer la parabole de degré inférieur comme un cas particulier d'une parabole de degré égal à celui de l'autre parabole et obtenir le polygone d'intégration qui correspond à cette nouvelle hypothèse (550). Cela étant, menons les cordes AE, $\alpha\varepsilon$, $\beta\varphi$, BF ; ces cordes ont pour projections certaines positions de la poutre. Marquons sur ces cordes les points C, γ, δ, D dont les projections horizontales tombent aux diverses positions de la section considérée. Nous allonsdémont rer que le polygone C$\gamma\delta$D est le polygone d'intégration qui détermine le lieu du point C, c'est-à-dire la ligne de repère spéciale des moments fléchissants qui se développent dans la section C.

Soient $z = ac$, $l = ae$; A, C, E les ordonnées des points A, C, E; on a :

$$C = \frac{A(l-z) + Ez}{l}.$$

Cette équation s'applique non seulement à la position AE, mais à toutes les positions que l'on obtient en déplaçant la poutre. Si on compte le déplacement u de la poutre, à partir de la position AE, on a :

$$A = M_0\left(1 - \frac{u}{h}\right)^n + M_1 n\left(1 - \frac{u}{h}\right)^{n-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

$$E = N_0\left(1 - \frac{u}{h}\right)^n + N_1 n\left(1 - \frac{u}{h}\right)^{n-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

On tire de là la valeur de C :

$$C = \frac{M_0(l-z) + N_0 z}{l}\left(1 - \frac{u}{h}\right)^n + \frac{M_1(l-z) + N_1 z_n}{l}\left(1 - \frac{u}{h}\right)^{n-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

Cette formule prouve que la courbe décrite par le point C est une parabole de degré n comme les paraboles AB et EF et les ordonnées des polygones d'intégration sont :

$$\frac{M_0(l-z) + N_0 z}{l} \quad \frac{M_1(l-z) + N_1 z}{l} \text{ etc.}$$

Ce sont précisément les ordonnées des points C, δ, γ, D déterminés par la construction que nous avons proposée ; il est d'ailleurs évident que les abscisses des points C, γ, δ, D sont bien celles du polygone d'intégration cherché. Nous avons donc démontré la proposition que nous avions annoncée.

Occupons-nous des efforts tranchants. Pour la position AE, la ligne de repère des efforts tranchants est la droite A'E' dérivée de la corde AE. Prenons de la même manière les dérivées des cordes $\alpha\varepsilon$, $\beta\varphi$, BD; la droite A'E' vient se placer en $\alpha'\varepsilon'$, $\beta'\varphi'$, B'D'; le point C' qui correspond à une

section z vient se placer en $\gamma'\,\delta'\,D'$. Nous allons démontrer que le polygone $C'\gamma'\delta'D'$ est le polygone d'intégration du lieu décrit par le point C', c'est-à-dire la ligne spéciale de repère des efforts tranchants qui se développent dans la section z.

En effet, l'ordonnée du point C' s'exprime par la formule :

$$C' = \frac{E - A}{l}.$$

En remplaçant E et A par leurs valeurs trouvées plus haut, on trouve :

$$C' = \frac{N_0 - M_0}{l}\left(1 - \frac{u}{h}\right)^n + \frac{N_1 - M_1}{l}\,n\left(1 - \frac{u}{h}\right)^{n-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

Donc le point C' décrit une parabole de degré n égal au degré des paraboles AB et EF; les sommets du polygone d'intégration de cette parabole ont pour ordonnées :

$$\frac{N_0 - M_0}{l},\quad \frac{N_1 - M_1}{l}\ \text{etc.}$$

Ce sont précisément les dérivées des droites AE, $\alpha\varepsilon$, $\beta\varphi$, BF. Cela démontre la construction proposée. Ces deux théorèmes s'appliquent évidemment aux tracés des courbes de repère spéciales relatives aux $\frac{dM}{du}$ et aux $\frac{dK}{du}$; car le tracé de ces courbes de repère s'opère de la même manière. Il suffit d'appliquer les mêmes constructions à la charge fictive $\frac{dp}{dx}$, de prendre la courbe p comme intégrale première et la courbe K comme intégrale seconde.

§ 4. — Train de charges uniformes sur une poutre sur deux appuis.

770. Moments fléchissants. Un train est formé de trois locomotives de 50 tonnes, de 10 mètres de longueur

chacune, suivies d'une suite indéfinie de waggons de 14 tonnes, de $7^m,60$ de longueur.

Assimilons ces charges à deux charges uniformément reparties : la première sera de 3 tonnes par mètre, la seconde de $\frac{14}{7,60} = 1^t,84$ par mètre courant. Ce train passe sur une poutre de 75^{mq} de longueur; on demande de déterminer la courbe des plus grands moments fléchissants.

Construisons d'abord l'épure des $\frac{dM}{du}$. Soit ABCD l'intégrale première de la charge. Menons les cordes AC, BD, ayant pour projections les positions *ac*, *bd* de la poutre. Les lignes de repère spéciales sont évidemment des droites; car le point A décrit une horizontale, le point B, une droite inclinée CD, soient deux paraboles l'une de degré 0, l'autre de degré un. Donc tout point α de AC décrit aussi une parabole de degré un, c'est-à-dire une droite $\alpha\alpha'$.

Si nous considérons les sections qui divisent la poutre en 4 parties égales, nous trouvons les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Les points D, E, F où ces droites coupent la ligne des K déterminent les positions de la poutre pour lesquelles les moments fléchissants passent par un maximum dans ces sections. En rapportant les points F, E, D en *f*, *e*, *d*, on trouve immédiatement les positions de la poutre. La courbe *fedb* permet en outre de déterminer immédiatement la position de la poutre qui réalise dans une section donnée *h* le plus grand moment fléchissant. On trouve la position H'H''.

Traçons l'intégrale seconde de la charge, inscrivons des cordes ayant pour projections les positions de la poutre déterminées comme il vient d'être dit; nous obtenons immédiatement les maxima des moments fléchissants dans les sections choisies et on trouve facilement le moment maximum dans une section quelconque. La courbe des plus grands moments fléchissants est alors déterminée par points.

On peut aussi déterminer les tangentes à cette courbe. Si en effet on construisait les lignes des M pour la charge mobile, la poutre étant considérée comme fixe, on trouverait pour chaque position des paraboles ayant pour enveloppe la courbe cherchée; or la tangente à l'enveloppe se confond avec la tangente à l'enveloppée. On peut donc trouver la tangente à la courbe des plus grands moments fléchissants en utilisant les tangentes à la ligne des M, intégrale seconde des charges. C'est ce qui explique les constructions indiquées sur la figure.

La courbe *cfedb* nous permet d'étudier les positions du train et des sections où le moment maximum se produit. Considérons les positions de la poutre comprises entre *bk* et *d'd''*. La section se déplace de *d'd*; la tête du train est toujours en *b*. Donc on peut dire que si on place la tête du train sur l'appui de droite et si on fait mouvoir le train vers la gauche, la section où le maximum se produit se déplace plus vite que le train lui-même. Pour une position voisine de *ac*, la section où le maximum se produit se trouve près des waggons, de telle sorte que la section où se produit le maximum passe de la tête du train au point de séparation des waggons et des locomotives, pendant que cette section passe de l'appui de droite à l'appui de gauche.

771. Efforts tranchants. L'épure des $\frac{dK}{du}$, montre immédiatement que les maxima et minima de l'effort tranchant s'obtiennent dans les sections où la charge varie. Donc chacune des courbes limites est la courbe spéciale à un point de la charge et nous obtiendrons la dérivée du lieu par la formule du numéro 766 :

$$DK = \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{du} = \text{charge moyenne.}$$

Cette charge moyenne est la charge totale divisée par la longueur de la poutre. Nous obtiendrons une des courbes

limites en suivant la tête du train. Pour la construire, dessinons (fig. 326, fig. *b*) la ligne des charges pour le train renversé de manière à ce que la tête du train soit sur l'appui de gauche, intégrons cette ligne en partant de l'appui de gauche et en prenant une base d'intégration telle que l'on obtienne l'intégrale divisée par *l*, la figure montre immédiatement que l'on trouve la ligne des valeurs de la charge moyenne, ou la ligne des DK. En intégrant cette ligne HKL, on trouve deux arcs de parabole déterminés par le polygone MNPQ. C'est la courbe des plus grands efforts tranchants négatifs. La courbe des plus grands efforts tranchants positifs est identique; on l'obtient aussi par une intégration; si on fait mouvoir le train en sens inverse, on trouve deux autres courbes limites; on ne conserve que les parties extérieures de ces courbes; dans le cas de la figure, c'est en suivant la tête du train que l'on trouve les limites supérieures et inférieures des efforts tranchants.

La détermination des courbes limites par une double intégration s'applique à une suite quelconque de charges uniformes. On renverse le train en plaçant le point de la charge que l'on suit, sur l'appui de droite et sur l'appui de gauche. On intègre les deux charges ainsi placées en partant des appuis. L'ordonnée comprise entre les deux intégrales est la charge totale; on intègre cette charge totale en divisant par *l*. C'est la courbe limite cherchée. Il faut déterminer directement un point de cette intégrale.

§ 5. — Train de forces isolées sur une poutre sur deux appuis.

772. Dérivées. L'intégrale première (fig. 327) est une ligne à gradins. Menons la corde A′B′, dont la projection horizontale soit une position de la poutre; nous obtenons l'épure des $\frac{dM}{du}$ pour cette position. Faisons mouvoir la

poutre; le point C′ de la corde A′B′ décrit une ligne à gradins; on obtiendra donc les M dans une section en intégrant l'ordonnée comprise entre deux lignes à gradins, donc la ligne des moments fléchissants qui se développent dans une section est une ligne polygonale.

Considérons tout particulièrement la section qui correspond au point F′; ce point F′ décrit un côté de la ligne des K. Donc les ordonnées qu'il faut intégrer pour obtenir le moment fléchissant dans cette section sont égales à zéro; donc le moment reste constant pour un certain déplacement. Soit AFB le polygone des M. Si la poutre reste immobile, et si le train se déplace, le moment fléchissant dans la section qui est la projection du point F′ ou du point F ne change pas; donc le point F est un pivot du côté mobile du lieu des moments fléchissants. On voit que le théorème des charges dérivées nous donne immédiatement la propriété du numero 563 et la construction des abscisses des pivots.

On obtient l'épure des $\frac{dK}{du}$ en prenant la dérivée de la corde A′B′; on trouve :

$$\frac{dK}{du} = -\frac{\Sigma P}{l}.$$

Il résulte de là que la ligne des efforts tranchants qui se développent dans une section est un polygone; on reconnaît immédiatement que quand la section passe sous une force isolée, l'effort tranchant varie brusquement d'une quantité égale à cette force.

773. Lignes spéciales à une section.— 1° On obtiendrait le polygone des moments fléchissants qui se développent dans une section en intégrant les ordonnées qui repésentent les $\frac{dM}{du}$. On peut considérer ce polygone comme le lieu des moments fléchissants dû à certaines forces fixes faciles à déterminer.

2° M. l'ingénieur Modigliano a indiqué un autre moyen de construire ces polygones dans une note qu'il a publiée dans le Politecnico de janvier-février 1880. Il consiste à étudier séparément l'effet de chaque force (le polygone est alors la ligne d'influence) et à superposer les résultats.

3° Si on fait mouvoir la poutre, la corde AB se déplace ; un point C décrit un polygone; on trouve les sommets de ce polygone en plaçant la poutre dans les positions pour lesquelles l'un des appuis tombe sous une force. C'est à M. Wittmann, professeur à l'école polytechnique de Munich que l'on doit cette méthode (Zeitschrift der bayerischen Architecten und Ingénieur Vereins, 1877).

On peut appliquer ces différentes méthodes aux efforts tranchants; les lignes de repère spéciales des K ou des $\frac{dK}{ud}$ sont alors des polygones identiques.

774. Moments fléchissants maxima. — En appliquant les méthodes précédentes, on détermine facilement le plus grand moment fléchissant qui se développe dans une section donnée. Mais il est surtout utile de tracer la courbe des moments fléchissants maxima; nous avons exposé au numéro 565 une méthode(1) qui permet de tracer

(1) Nous avons imaginé cette méthode en 1872. Nous l'avons exposée dans une note que nous avons remise à notre savant professeur M. Boudin. L'année suivante, tous les élèves ingénieurs de notre promotion l'ont employée.

Nous avons fait remarquer au numéro 566 que l'on obtient les paraboles limites en supposant que la poutre supporte une charge uniforme $2q$, accompagnée de charges négatives isolées q_σ passant par les pivots. Il nous est revenu qu'on avait cherché à démontrer cette proposition par l'analyse. Ce n'est pas de cette façon que nous l'avons trouvée. Introduisons la charge $2q$ et des forces isolées indéterminées aux pivots. Concentrons les charges sur les pivots et sur les lignes d'action des forces du train dans une position quelconque. Exprimons que les charges concentrées aux pivots sont nulles, nous trouverons non seulement la valeur des forces fictives q_σ, mais nous démontrerons d'une manière très-élégante l'existence des pivots du polygone des moments fléchissants dus au train.

directement cette courbe sans qu'il soit nécessaire de construire les lignes des moments spéciaux à une section. La méthode que nous avons exposée suffit au point de vue pratique, mais au point de vue théorique, le théorème des charges dérivées permet de la compléter.

Reprenons le problème du numéro 770, mais en supposant les charges concentrées, comme l'indique la figure 328. Soit AB la poutre ; portons à partir du point B et bout à bout les forces du train, 1, 2, 3.., 23, 24... etc., et joignons les extrémités de ces forces au point B ; nous obtenons une épure qui donne les abscisses des pivots du lieu des M pour les différents systèmes de forces que nous avons à considérer.

Remarquons que pour un système de forces, les plus grands moments fléchissants sont les ordonnées d'arcs paraboliques que l'on détermine par trois points ; mais comme il faut considérer différents systèmes de forces, la courbe des plus grands moments est formée par les arcs paraboliques qui dépassent les autres. Nous nous sommes bornés à dire que, en construisant l'épure, on voyait immédiatement les paraboles limites et que l'on ne traçait effectivement que celles-là.

Voici qu'elles sont les paraboles limites dans le cas de la fig. 328. On réalise les plus grands moments fléchissants près de l'appui A, en plaçant la tête du train en A. On déplace le train vers la gauche, la section où le plus grand moment fléchissant se produit, suit la première force du train. On aura donc à construire un premier arc parabolique ; la projection de cet arc s'étend du point A au point B qui est le pivot du second côté. A partir du point B la parabole de la première force passe sous la parabole de la seconde ; donc quand la première force est en B, on fait reculer le train jusqu'à ce que la seconde force vienne en B, et alors on fait mouvoir le train vers la gauche et la section du plus grand moment fléchissant suit la seconde force. Si on représente la position des charges sur un bande de papier,

on s'aperçoit que quand la seconde force vient en α, la force 24 s'échappe du train. Donc la seconde parabole limite s'étend de B au point α; en α il y a un point angulaire. La troisième parabole limite s'étend du point α au pivot C du second côté du lieu des M; on remarquera que le point C se trouve sur la droite qui joint le point A à l'extrémité de la force 23 et non sur la droite AB prolongée. On trouve de même qu'en β la force 23 s'échappe du train, qu'au point D le train doit reculer vers la droite et que la section du plus grand moment suit la troisième force, qu'au point γ la force 22 s'échappe du train; mais au point E une difficulté se présente. Le point E est le pivot pour le train formé des 21 premières forces; on est amené à reculer le train vers la droite jusqu'au moment où la force 5 vient se placer en E; mais on reconnaît alors que la force 22 réapparaît sur la poutre. Si on considérait le train de 22 forces, le pivot serait le point E'. Il est facile de voir que le point où la force 5 doit se substituer à la force 4 est un certain point E'' compris entre les points E et E'.

Soient (fig. 331) Dγ la parabole $\frac{4}{22}$, c'est-à-dire la parabole relative à la force 4 du train des 22 premières forces, γE la parabole $\frac{4}{21}$, EF la parabole $\frac{5}{21}$. Ramenons la force 5 vers le point E, on trouve en γ' un point angulaire produit par la rentrée de la force 22, et la parabole $\frac{5}{22}$ en γ'E'. On voit que la courbe limite est formée des paraboles :

$$\frac{4}{22}, \quad \frac{4}{21}, \quad \frac{5}{22}, \quad \frac{5}{21}.$$

Le point angulaire qui sépare les paraboles $\frac{4}{21}$ et $\frac{5}{22}$ est le point E''. Ce point est compris entre le point E intersection des paraboles $\frac{5}{21}$ et $\frac{4}{21}$ et le point E' intersection des

paraboles $\frac{5}{22}$ et $\frac{4}{22}$. Il n'est pas possible de le déterminer par une construction linéaire, car ce point E'' est l'intersection de deux paraboles de paramètres différents; donc il dépend d'une équation du second degré. Ce point s'obtiendra en prolongeant les deux paraboles $\frac{4}{21}$ et $\frac{5}{22}$.

Reprenons la figure 328. Lorsque la force 5 est en γ', la force 22 s'échappe. Au point D la force 6 se substitue à la force 5 et on continue de la même manière. Le point de passage de la force 8 à la force 9 donne lieu à la même difficulté que le point de passage de la force 5 à la force 4.

Si l'on compare le mouvement du train de forces isolées, au mouvement du train de charges uniformes, que nous avons étudié au numéro 770, on trouve dans les deux cas, que, pour déplacer la section du plus grand moment fléchissant de l'appui de droite vers l'appui de gauche, le train dans sa marche générale marche moins vite que cette section ou ce qui revient au même il y a par rapport à cette section recul du train vers la droite. Dans le cas de la charge continue ce mouvement de recul est continu ; dans le cas des forces isolées, le train se déplace avec la même vitesse que la section du plus grand moment, mais en certains points, il y a un recul brusque du train vers la droite. Ce recul change la force qui se trouve dans la section du plus grand moment; ces mouvements de recul se produisent généralement sur des pivots du lieu des M, mais quelquefois en des points moins faciles à déterminer.

Nous affirmons que les arcs paraboliques déterminés comme il vient d'être dit, constituent la courbe limite, parce que si l'on fait l'épure, on voit immédiatement que ces arcs paraboliques dépassent les autres. Il peut être utile de déterminer les courbes limites d'une manière plus rigoureuse au point de vue mathématique. On pourrait d'abord appliquer les méthodes de M. Modigliano ou de M. Witmann pour

déterminer dans différentes régions la force qui produit le plus grand moment fléchissant; mais cela conduirait à de longues opérations. Nous allons résoudre la question en utilisant le théorème des charges dérivées.

Traçons (fig. 329) l'intégrale première des charges; menons une corde AL ayant pour projection horizontale l'une des positions de la poutre. Faisons mouvoir cette corde vers la droite en traçant les positions particulières où une force s'échappe de la poutre. En suivant un point de cette corde, on obtient la ligne de repère des $\frac{dM}{du}$ dans cette section. Selon que ces lignes coupent les forces 1, 2, 3... ce seront les forces 1, 2, 3... qui passeront sur ces sections lorsque le moment fléchissant prendra sa plus grande valeur.

On reconnaît par exemple que tous les points de AB décrivent des lignes horizontales qui coupent la force 1. Les trajectoires complètes de ces points sont des lignes à gradins, mais il n'est pas nécessaire de les prolonger très-loin pour voir que c'est sous la force 1 que le moment fléchissant est le plus grand. On trouve de la même façon les segments B'C, C'D, etc., où les forces 2, 3... réalisent le maximum. Les lignes pointillées sont les lignes qui limitent ces différents segments.

On peut même déterminer, à priori, les points de passage difficiles dont nous avons déjà constaté l'existence. Le point E est un de ces points; il décrit une ligne à gradins qui coupe à la fois la force 5 et la force 4. Le moment fléchissant dans cette section passe par un maximum sous les forces 5 et 4; il y a un minimum intermédiaire. Le point E est déterminé de telle façon que ces deux maxima soient égaux.

Pour les sections situées à droite du point E c'est la force 4 qui donne le plus grand maximum; pour les sections situées à gauche, c'est au contraire la force 5.

Lorsque cette section E passe de le force 5 à la force 4,

la force 22 s'échappe de la poutre. Si plusieurs forces s'échappaient de la poutre, nous remplaçerions ces forces par leurs résultantes, les deux maxima qu'il faut égaler ne changeraient pas; le problème serait simplifié. Dans cette hypothèse la ligne EE′ ne présentera qu'un gradin; nous l'avons représentée fig. 320. Les droites O*c* et O*d* sont les positions de la corde du lieu des K, au moment ou la force 22 s'échappe de la poutre.

Les deux maxima du moment fléchissant seront égaux si l'on a :

$$\text{aire } aEdi = \text{aire } icE'b$$

ou

$$\frac{ci}{id} = \frac{ai}{ib}.$$

La droite O*i* doit satisfaire à deux conditions :

1° elle passe par le point O; 2° elle divise les droites *ab* et *a′b′* dans le même rapport, car on a :

$$\frac{a'i'}{i'b'} = \frac{ci}{id} = \frac{ai}{ib}.$$

En vertu de la seconde condition, la droite *ii′* enveloppe une parabole; le problème est ramené à mener du point O une tangente à cette parabole. On pourrait déduire de là une détermination exacte de la droite O*i*, mais cette construction est peu pratique, parce que cette construction donnerait à la fois les deux points d'intersection des paraboles $\frac{4}{21}$ et $\frac{5}{22}$. Or les paraboles ont des paramètres peu différents, l'un des points d'intersection s'éloigne à une grande distance.

On obtiendra un résultat très approché si on mène à l'enveloppe des droites *ii′*, une tangente parallèle à O*c*, une tangente parallèle à O*d*, et si on prend la moyenne des résultats. Si on suppose *i′i* parallèle à O*c*, on a :

$$\frac{a''i}{ib'} = \frac{ai}{ib}.$$

De là résulte une construction simple du point *i*. Une construction du même genre s'applique au cas où on suppose *ii'* parallèle à O*d*. Les deux points que l'on trouve diffèrent à peine. C'est ce qui justifie le procédé.

En résumé, on voit qu'il est possible de déterminer à priori les différents segments de la poutre où les maxima des moments fléchissants se produisent sous les différentes forces. Pour tracer les arcs paraboliques qui constituent la courbe limite, il suffit de tracer un lieu des M pour le train de force indéfini; ce lieu convient pour tous les systèmes de forces : 1 à 24, 1 à 23, etc., si on déplace la ligne de repère. On détermine chaque parabole utile par trois points, deux pivots et un sommet. On corrige au compas les ordonnées de ces points de manière à ramener les lieux à une ligne de repère unique. Dans ces conditions on ne trace que les lignes utiles. On trace les paraboles par les constructions données aux numéros 85 à 90.

775. Efforts tranchants maxima. — C'est en suivant la première force que l'on trouvera généralement les plus grands efforts tranchants négatifs On peut obtenir la ligne limite en plaçant la première force sur l'appui de gauche et en renversant le train; l'intégrale seconde des forces est le lieu cherché. On arrive à cette construction, qui est au fond, celle du numéro 565, en raisonnant comme au numéro 771. On opère de même lorsqu'il faut suivre d'autres forces.

§ VI. Poutres prismatiques.

776. Poutre encastrée ou à plusieurs travées. — Intégrons quatre fois la courbe des charges, pour chaque position de la poutre et déterminons les lignes de repère. Les différents points de ces lignes de repère décrivent des lignes de repère spéciales à une section. Si on construit en même temps les lignes de repère spéciales pour les dérivées, on pourra déterminer pour chaque section les plus grands moments fléchissants et les plus grands efforts

tranchants. Les opérations graphiques sont très longues, mais les principes qu'il s'agit d'appliquer sont les mêmes que ceux que nous avons exposés précédemment.

777. Polygones d'intégration. — Lorsque la charge s'exprime par une fonction entière, on détermine les intégrales par polygones d'intégration; on peut, dans ce cas, déterminer les polygones d'intégration des lignes de repère spéciales, en généralisant la méthode que nous avons déja employée pour les poutres sur deux appuis.

Lorsque les appuis ou encastrement ne sont pas de niveau, on étudie séparément l'influence des dénivellations; ce sont des constantes dont nous n'avons pas à nous occuper. Nous supposerons donc les appuis de niveau. Nous supposerons aussi que la poutre repose simplement sur ses appuis; pour obtenir un encastrement, il suffira d'admettre que deux appuis soient infiniment voisins.

Première méthode. — Plaçons la poutre dans une position; soient y_1, y_2... y_n les ordonnées de l'intégrale quatrième des charges, sur les appuis x_1, x_2... x_n. Les lignes de repère des K, M, η, y, sont complètement déterminées par ces points et les valeurs M_1, M_n de l'intégrale seconde aux extrémités de la poutre. Plaçons-nous dans une même section z de la poutre. Les ordonnées K', M', η', y' des lignes de repère sont données par des expressions de la forme :

$$y' = \Sigma \alpha_1 y_1 + \beta M_1 + \gamma M_n$$

$$\eta' = \Sigma \frac{d\alpha_1}{dz} y_1 + \frac{d\beta}{dz} M_1 + \frac{d\gamma}{dz} M_n$$

$$M' = \Sigma \frac{d^2\alpha_1}{dz^2} y_1 + \frac{d^2\beta}{dz^2} M_1 + \frac{d^2\gamma}{dz^2} M_n$$

$$K' = \Sigma \frac{d^3\alpha_1}{dz^3} y_1 + \frac{d^3\beta}{dz^3} M_1 + \frac{d^3\gamma}{dz^3} M_n.$$

En effet, la ligne de repère des y, est formée d'une série d'arcs de paraboles du troisième degré dont on donne les

extrémités; ces arcs ont entre eux un contact du second ordre. Aux extrémités on a

$$\frac{d^2y'_1}{dx^2} = M_1 \quad \text{et} \quad \frac{d^2y_n'}{dx^2} = M_n,$$

car en ces points $M = M'$. Toutes ces conditions se traduisent par des équations linéaires, entre $y_1, y_2 \cdots y_n$, M_1, M_n et les coefficients des équations des arcs paraboliques; ces coefficients s'exprimeront donc linéairement en fonction des ordonnées connues, et on sera conduit à une expression de la forme que nous avons indiquée en calculant l'ordonnée d'un point de la ligne de repère des y. Les quantités $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n, \beta, \gamma$ sont des fonctions entières du troisième degré de l'abscisse z de la section considérée. On obtient η', M', K' en prenant les dérivées de y' par rapport à z.

Déplaçons la poutre sous les charges. Soit u le déplacement variable; les points (x_1y_1) $(x_2y_2)\cdots(x_ny_n)$ (x_1M_1) (x_nM_n) décrivent des paraboles; supposons que ces paraboles soient déterminées par leurs polygones d'intégration, que ces polygones aient le même nombre de côtés et la même projection horizontale h; on a :

$$y_1 = a_0\left(1-\frac{u}{h}\right)^i + a_1 i\left(1-\frac{u}{h}\right)^{i-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

$$y_2 = b_0\left(1-\frac{u}{h}\right)^i + b_1 i\left(1-\frac{u}{h}\right)^{i-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

. . . . . .

$$M_1 = l_0\left(1-\frac{u}{h}\right)^i + l_1 i\left(1-\frac{u}{h}\right)^{i-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

$$M_n = m_0\left(1-\frac{u}{h}\right)^i + m_1 i\left(1-\frac{u}{h}\right)^{i-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

La valeur de y' devient alors :

$$y' = A_0\left(1-\frac{u}{h}\right)^i + A_1 i\left(1-\frac{u}{h}\right)^{i-1}\frac{u}{h} + \cdots$$

Si l'on pose :

$$A_0 = \Sigma\alpha_1 a_0 + \beta l_0 + \gamma m_0$$
$$A_1 = \Sigma\alpha_1 a_1 + \beta l_1 + \gamma m_1 \text{ etc...}$$

Il résulte de là que les ordonnées A_1, A_2 etc., des sommets du polygone d'intégration de l'arc y' se trouveront de la même manière que l'ordonnée A_0 du premier point. Ainsi par exemple, on trouvera A_1, en déplaçant la poutre de $\frac{h}{i}$, et en supposant que les ordonnées de l'intégrale quatrième sur les appuis soient a_1, b_1, c_1 ... et que les ordonnées de l'intégrale seconde aux extrémités soient l_1 et m_1. En d'autres termes, on opère comme si les polygones d'intégration étaient les intégrales elles-mêmes. On place la poutre de telle façon que les appuis viennent successivement sous les sommets de ces polygones. Pour une section z, on trouve $i + 1$ points de y'; ce sont des points inexacts sauf les extrêmes, mais ils coïncident précisément avec les sommets du polygone d'intégration de la ligne de repère des y, spéciale à la section z. La même démonstration s'applique aux lignes de repère spéciales des K, M et η.

Il importe de remarquer qu'avant d'appliquer cette règle, tous les polygones d'intégration doivent être transformés de manière à présenter la même projection horizontale et le même nombre de côtés. S'il s'agit par exemple, d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, la ligne de repère des y est déterminée par deux points y_1, y_2 et deux inclinaisons η_1, η_2. Avant d'appliquer la règle, il faudra transformer les polygones d'intégration des courbes des η_1 et η_2 de manière qu'ils présentent le même nombre de côtés que les polygones des y_1 et des y_2. On arrive au même résultat, en prenant comme extrémités de la ligne des y' (ligne de repère des y) les sommets des polygones d'intégration des y_1 et des y_2, et comme inclinaisons extrêmes, les directions des côtés des nouveaux polygones des y_1 et des y_2 que l'on

obtient en augmentant d'une unité le nombre de leurs côtés.

Deuxième méthode. — On peut aussi déterminer la ligne de repère spéciale à une section en plaçant la poutre dans une position unique et en construisant l'ordonnée d'un point de cette ligne et un nombre suffisant de dérivées. Soit par exemple à construire la ligne des M dans une section : on obtient $\frac{dM}{du}$ en étudiant l'effet de la charge fictive $\frac{dp}{dx}$; on obtiendra de même $\frac{d^2M}{du^2}$, $\frac{d^3M}{du^3}$, ... en étudiant l'effet des charges $\frac{d^2p}{dx^2}$, $\frac{d^3p}{dx^3}$, . . On peut donc construire la courbe M (u) par intégrations successives d'une constante; car si la fonction M est de degré i, sa dérivée d'ordre i est constante. Lorsque l'on adopte la méthode des lignes de repère, les ordonnées M, $\frac{dM}{du}$, $\frac{d^2M}{du^2}$... sont comprises entre deux lignes; les unes sont déjà construites: ce sont les intégrales et dérivées de la charge p; les autres se déduisent donc aussi les unes des autres par intégration. La ligne de repère des M dans une section et celles des $\frac{dM}{du}$, des $\frac{d^2M}{du^2}$ etc. s'obtiendront donc en intégrant l'ordonnée constante de la ligne de repère des $\frac{d^iM}{du^i}$ et en utilisant les points initiaux obtenus au moyen des épures des dérivées pour la position initiale de la poutre.

Troisième méthode. — On peut aussi combiner les deux méthodes précédentes. Soit à construire les lignes de repère spéciales pour un déplacement h de la poutre. Plaçons la poutre dans les deux positions extrêmes; nous déterminerons les extrémités de la ligne parabolique qu'il s'agit de construire. Au moyen des épures des dérivées, nous obtien-

drons les dérivées aux extrémités de cette ligne; nous en construirons un nombre suffisant pour que l'arc parabolique soit déterminé.

Si, par exemple, la charge est formée de forces concentrées, la quatrième intégrale de la charge est formée d'arcs paraboliques du troisième degré; donc les lignes de repère spéciales des M, des K, des η, des y sont aussi des paraboles du troisième degré. On déterminera l'une de ces lignes par deux points et deux tangentes; on y arrivera en plaçant la poutre dans deux positions et en traçant pour ces deux positions les lignes de repère des éléments et de leurs dérivées premières.

778. Applications. — 1° Prenons comme première application le cas d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, sollicitée par une force concentrée mobile. Soit ABC (fig. 332, fig. *a*) l'intégrale seconde de la force ou lieu des M. Déplaçons la poutre sous la force; pour une position kl, la ligne de repère des M est la droite KL; les points K et L décrivent des paraboles du troisième degré que nous nous proposons de construire. Nous allons démontrer que le polygone d'intégration de la parabole du point L est ADEB et que le polygone d'intégration de la parabole du point K est BFHC. Ces courbes se construisent alors de bien des manières : multiplications, intégrations ou inscriptions de tangentes.

Pour démontrer cette proposition, plaçons la poutre dans les positions ab et $b'c$; ce sont les positions où la force agit sur l'un des appuis; tous les moments fléchissants sont nuls; la droite KL passe donc de la position AB à la position BC et par suite les points A et B sont les extrémités de la courbe décrite par le point L et les points B et C sont les extrémités de la courbe décrite par le point K. Nous obtiendrons les tangentes extrêmes de ces courbes par la considération de la charge dérivée.

Nous savons que cette charge dérivée est un couple isolé

dont P serait le moment. Pour la position *ab*, le couple isolé agit à l'extrémité gauche de la poutre; les moments fléchissants sont nuls; donc $\frac{dM}{du} = 0$ au point A; il faut pour cela que l'arc AL touche au point A la ligne des M; donc AD est le premier côté du polygone d'intégration. Mais on a $\frac{dM}{du} = 0$ pour toutes les sections de la poutre; donc toutes les lignes de repère spéciales touchent la droite AB; il en résulte que l'arc BK doit aussi toucher la droite AB prolongée. On démontre de la même manière que la droite CB touche les arcs CK et BL; nous avons donc déterminé les arcs paraboliques par leurs extrémités et leurs tangentes extrêmes; cela démontre la proposition que nous avons avancée.

Nous avons trouvé les tangentes extrêmes aux lignes de repère spéciales par un raisonnement particulier applicable seulement au cas que nous venons d'examiner. On peut aussi les obtenir par la méthode générale fondée sur la considération de l'épure des $\frac{dM}{du}$. Dans cette épure, que nous avons représentée par la figure 332, fig *b*, la ligne des moments fléchissants est l'intégrale première de la force ou A'B'C'D'. Pour une position *kl* de la poutre, la ligne de repère des $\frac{dM}{du}$ est une certaine droite K'L'; les points L' et K' décrivent des paraboles du second degré dérivées des courbes du troisième degré décrites par les points K et L. Pour les positions extrêmes *ab* et *b'c* de la poutre, la droite K'L' prend les positions A'B' et C'D'; les extrémités de la courbe décrite par le point L' sont donc A' et C'; c'est en intégrant les ordonnées de ces points que nous trouverons les côtés AD et BE du polygone d'intégration de la courbe ALB; on retrouve évidemment le résultat que nous avons déjà obtenu

d'une autre façon. Le même raisonnement s'applique au courbes D'K'B' et BKC.

Pour achever l'épure des $\frac{dM}{du}$, il suffit de tracer les polygones d'intégration A'E'C' et B'F'D' des courbes décrites par les points L' et K'. En prenant les dérivées des côtés DE et FH, on obtiendra les ordonnées des points E' et F'; le problème est résolu.

On peut aussi déduire l'épure des $\frac{dM}{du}$ de l'épure des $\frac{d^2M}{du^2}$. Pour dresser cette dernière, nous devons considérer l'intégrale seconde ABC comme la ligne des y ou l'intégrale quatrième de la charge fictive qui engendre les dérivées secondes. La charge P représente alors un accroissement brusque de l'inclinaison η; cet accroissement brusque peut être considéré comme l'effet d'un système concentré de trois forces infiniment grandes en équilibre. La ligne des moments fléchissants est alors l'horizontale A''B''D''; mais il faut supposer en B''C'' une surface des M égale à P concentrée sur une même ordonnée infiniment grande. Pour la position *ab* de la poutre, la ligne des repère des $\frac{d^2M}{du^2}$ est une droite E''C''; elle satisfait à la condition que les poids de l'aire concentrée P et de l'aire C''L''E''A''B'' se font équilibre. Nous l'avons déterminée par la construction du numéro 579; l'un des moments principaux est nul. Pour la position *b'c*, on trouve pour ligne de repère la droite C''F'', symétrique de la précédente. Pour une position quelconque on trouverait une certaine droite K''L''. Les points L'' et K'' doivent décrire des droites; ces droites sont déterminées par deux points; ce sont les droites E''C'' et C''F''. En intégrant deux fois ces droites, on retrouverait les courbes A'L'C', ALB, B'K'D' et BKC.

L'épure des efforts tranchants se déduit immédiatement de

celle des moments fléchissants. Pour une position quelconque *kl* de la poutre, on prend la dérivée de la ligne des M′ qui est KL, on trouve la ligne des K′ qui est K″L″. Il faut déterminer les courbes décrites par les points L″ et K″. Appliquons la première méthode du numéro 777. Opérons comme si les points L et K décrivaient les polygones d'intégration ADEB et BFHC ; prenons les dérivées des positions fausses de la droite KL qui résultent de cette hypothèse, c'est-à-dire les dérivées des droites AB, DF, EH, BC; nous obtenons les ordonnées des polygones d'intégration des paraboles du troisième degré décrites par les points L″ et K″; on trouve ces polygones en A′D″E″C′ et en B′F″H″D′. On pourrait aussi trouver ces polygones directement; en plaçant la poutre dans les positions extrêmes, on reconnaît immédiatement que l'on a $K = 0 \frac{dK}{du} = 0$, ce qui détermine les extrémités et les tangentes extrêmes des lignes de repère spéciales. Remarquons aussi que ce tracé des efforts tranchants est au fond le même que celui du numéro 586.

2° Prenons comme seconde application le cas d'une force isolée mobile sollicitant une poutre posée sur trois appuis de niveau. Soit (fig. 333) ABC l'intégrale seconde de la force ou ligne des M. Pour une position quelconque *khf* de la poutre, la ligne de repère des M ou ligne des M′ est le polygone FHK; les points F et K décrivent les droites AB et BC; mais le point H décrit une parabole du troisième degré. Nous allons démontrer que le polygone d'intégration de cette parabole est BDE; on l'obtient en menant BD parallèlement à AC et en joignant DE; les abscisses des points B, D, N, E sont suffisamment connues.

Choisissons comme positions extrêmes de la poutre les positions *abc* et *a′b′c′*; on les obtient en plaçant successivement les extrémités de la travée de droite sous la force concentrée. Pour ces deux positions les moments fléchis-

sants sont nuls; pour la première, la ligne des M′ est ABC; pour la seconde, c'est BEL; on obtient ainsi les extrémités B et E de la courbe décrite par le point H.

Nous trouverons les tangentes extrêmes en traçant l'épure des $\frac{dM}{du}$ (fig. *c*). L'intégrale première de la charge est A′B′B″L′; nous devons la traiter comme un lieu de moments fléchissants. Pour la première position *abc* de la poutre, la ligne de repère des $\frac{dM}{du}$ ou ligne des $\frac{\overline{dM'}}{du}$ est le polygone A′E′C′; on peut l'obtenir de bien des manières. La méthode des transformées droites donne immédiatement la fausse solution C′B″D′ et le pivot P qui détermine le côté A′E′. Pour la position *a′b′c′* de la poutre, la ligne de repère des $\frac{dM}{du}$ ou ligne des $\frac{dM'}{du}$ est L′F′B′; pour l'obtenir on trace la fausse solution L′B″ qui donne le pivot Q; ce pivot détermine le côté B′F′. En intégrant les ordonnées des points E′ et F′, on trouve les directions des côtés BN et NE.

Nous avons résolu complètement le problème proposé, mais nous n'avons pas démontré les propriétés que nous avons annoncées. C'est ce que nous allons faire. Les côtés EN et ND sont en ligne droite parce que au point E, on a $\frac{d^2M}{du^2} = 0$. En effet, on obtient les dérivées secondes en supposant que la force P représente un $\Delta\eta$ brusque; mais pour la seconde position *a′b′c′* de la poutre, ce $\Delta\eta$ ne produit pas d'effet; car le point angulaire est à l'extrémité de la poutre, sur l'appui de droite; tous les éléments sont nuls; donc $\frac{d^2M}{du^2} = 0$. Il nous reste à prouver que le côté BD est parallèle à AC. Considérons la charge dérivée; ABC est la ligne des η ou plus exactement celle des $\frac{d\eta}{du}$. Supposons

la poutre dans la position *abc*. La ligne de repère ou ligne des $\frac{d\eta'}{du}$ est déterminée par un polygone de trois côtés. Si nous partons de l'appui de droite, nous trouvons la fausse solution AB; le pivot Q du second côté est aux deux tiers de AB. Si nous partons de l'extrémité gauche, nous obtenons de même la fausse solution CB et le pivot P du même côté. Ce côté de la ligne des $\frac{d\eta'}{du}$ est donc PQ. Ce côté est l'intégrale de l'ordonnée $\frac{d\mathrm{M}'}{du}$ au point B, donc ce côté PQ donne la direction du côté BD. Or il est évident que PQ est parallèle à AC; BD est donc parallèle à AC.

L'épure des efforts tranchants, et celle des $\frac{d\mathrm{K}}{du}$ se déduisent immédiatement de celles des M et des $\frac{d\mathrm{M}}{du}$ en appliquant comme précédemment la première méthode du numéro 777.

3° Un train de forces concentrées passe sur une poutre à plusieurs travées; on demande de construire les épures des M, des K, des $\frac{d\mathrm{M}}{du}$, des $\frac{d\mathrm{K}}{du}$. On trace les quatre intégrales des charges; on déplace la poutre sous les charges. Les lois de variation des éléments changent toutes les fois que l'un des appuis passe sous une force. On placera successivement la poutre dans ces positions particulières et on déterminera, par les méthodes connues, les lignes des M', et des $\frac{d\mathrm{M}'}{du}$. Les sommets de la ligne des M', décrivent des arcs paraboliques du troisième degré déterminés par leurs tangentes extrêmes; les sommets de la ligne des $\frac{d\mathrm{M}'}{du}$ décrivent des

arcs paraboliques du second degré déterminés de la même façon. Une simple dérivation détermine les polygones d'intégration des courbes décrites par les sommets des lignes des K′ et des $\frac{dK'}{du}$.

Les opérations graphiques qui permettent de déterminer les lignes des M′ ou des $\frac{dM'}{du}$ sont assez longues; mais un certain nombre de ces opérations ne se font que pour une position de la poutre; telles sont la détermination des pivots et le tracé des directrices de continuité. Les opérations qui restent à effectuer sont alors assez simples. On peut, par exemple, appliquer la méthode des points invariables des M′ (602); on les obtient en prenant deux fois la dérivée d'un polygone inscrit dans l'intégrale quatrième; on trace alors le polygone des pivots des M′, on y circonscrit la ligne des M′. Lorsqu'il y a des travées égales, les mêmes points invariables peuvent servir pour toutes ces travées.

4° Une suite de charges uniformes passe sur une poutre à plusieurs travées; on demande de tracer les épures des M, des $\frac{dM}{du}$, des K et des $\frac{dK}{du}$. On trace les quatre intégrales de la charge; la quatrième est formée d'arcs paraboliques du quatrième degré; on déplace la poutre sous la charge. Les lois de variation des éléments changent lorsqu'une discontinuité passe sur un appui. On placera successivement la poutre dans ces positions particulières et on déterminera par les méthodes connues les lignes des M′, des $\frac{dM'}{du}$ et des $\frac{d^2M'}{du^2}$. Les sommets de la ligne des M′ décrivent des arcs paraboliques du quatrième degré, dont on peut trouver les polygones d'intégration; on connait, en effet, les extrémités de ces arcs et deux dérivées en ces extrémités. Il y a un élément surabondant, ce qui prouve que l'épure

des $\frac{d^2M'}{du^2}$ ne doit être tracée que pour la moitié du nombre des positions particulières de la poutre. Les sommets de la ligne des $\frac{dM'}{du}$ décrivent des arcs paraboliques du troisième degré, qui sont les dérivées des courbes décrites par les sommets de la ligne des M'. Une simple dérivation détermine les polygones d'intégration des courbes décrites par les sommets des lignes des K' et des $\frac{dK'}{du}$.

779. Moments fléchissants et efforts tranchants maxima. — Traçons pour une position de la poutre les lignes des M' et des $\frac{dM'}{du}$. Le polygone des $\frac{dM'}{du}$ coupe l'intégrale première des charges en certains points où l'on a $\frac{dM}{du} = 0$. Dans ces sections les moments fléchissants passent par un maximum ou un minimun. Plaçons la poutre dans des positions suffisamment rapprochées; prenons au compas les valeurs maxima ou minima; portons les, en ordonnées, dans les sections où elles se développent, ces sections étant prises dans une position fixe de la poutre; en d'autres termes imitons, en tout point, la méthode du numéro 770. Nous obtiendrons une série de courbes dont quelques-unes seront peut-être inutiles, mais qui détermineront d'une manière complète les limites supérieures et inférieures des moments fléchissants.

On opère de même pour l'épure des K et celle des $\frac{dK}{du}$; on obtient les limites supérieures et inférieures des efforts tranchants.

Lorsque la courbe des charges est tout-à-fait quelconque, il faut déterminer les lignes des M', des $\frac{dM'}{du}$, des K', des

$\frac{dK'}{du}$, pour des positions très-rapprochées de la poutre. Lorsque la charge est formée de forces concentrées, de forces uniformément réparties ou plus généralement quand la charge est parabolique, on peut utiliser les polygones d'intégration.

On peut alors prendre des positions de la poutre moins nombreuses et plus espacées; on trace les paraboles décrites par les sommets des lignes de repère; les positions intermédiaires de ces lignes de repère s'obtiennent alors sans aucune peine.

Lorsque la courbe des charges est quelconque, les courbes limites sont, dans le sens mathématique du mot, les enveloppes des lignes des M et des K pour les différentes positions de la charge sur la poutre fixe. Mais il y a des exceptions et ces exceptions sont précisément les cas les plus fréquents.

Lorsque les charges sont concentrées, la ligne des K est une ligne à gradins; le polygone des $\frac{dM'}{du}$ coupe certains côtés verticaux; le moment fléchissant passe par un minimum ou maximum négatif dans une section située sous une force. La courbe limite qui correspond à cette section mobile est une courbe spéciale à un point de la charge; ce n'est pas une enveloppe : c'est le lieu décrit par un sommet du polygone des M. Il est facile de démontrer que ce lieu est une parabole du quatrième degré. En effet, le moment fléchissant sous une force est donnée sur l'épure où l'on suppose la charge fixe et la poutre mobile, par une différence $M'' - M'$; M'' est constant; M' est l'ordonnée d'une droite. Soient : A, B, les ordonnées des extrémités de cette droite; l, la longueur de la travée; z, la distance de la force à l'une des extrémités; on a :

$$M' = \frac{zA + (l - z)B}{l}.$$

Or, A et B sont des fonctions entières du troisième degré en z; donc M′ et par suite M″ — M′, est une fonction du quatrième degré en z; c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Au contraire, les valeurs de M dans les sections où la ligne des $\frac{dM'}{du}$ coupe les côtés horizontaux du lieu des K sont les ordonnées des enveloppes des côtés de la ligne des M. Toutes ces enveloppes et tous les arcs de paraboles décrits par les sommets du lieu des M ne sont pas des courbes qui font partie des limites des moments fléchissants. Au moyen des courbes de repère spéciales des $\frac{dM}{du}$, on peut en imitant ce qui a été dit pour la poutre sur deux appuis ne tracer que les courbes limites. Toutefois il n'est pas aussi facile de déterminer les points de passage où une force se substitue à une autre dans la production des maxima négatifs. Ces points dépendent d'équations du troisième degré et quelquefois du quatrième. Au lieu de chercher directement ces points, on tracera quelques segments inutiles des arcs paraboliques du quatrième degré et par leurs intersections, on obtiendra ces points de passage.

Les courbes limites des efforts tranchants sont toujours des courbes spéciales à un point de la charge; on démontre facilement que ce sont des arcs paraboliques du troisième degré.

Lorsque la charge est formée d'une suite de charges uniformes, les sommets du lieu des K décrivent aussi des courbes parmi lesquelles se trouvent les courbes limites; ce sont des arcs paraboliques du quatrième degré. En effet, l'effort tranchant s'obtient sur l'épure où l'on suppose la charge fixe et la poutre mobile par une différence K″ — K′; K″ est constant, K′ est une fonction du quatrième degré.

780. Problèmes pratiques. — Dans l'étude de la

stabilité d'un pont, on est conduit à examiner l'influence d'une charge mobile formée d'un certain nombre de personnes; c'est le cas d'une charge uniforme qui peut se fractionner indéfiniment. Dans le cas d'un pont pour chemin de fer, il faut étudier l'influence du passage d'un train; mais comme il peut se produire des ruptures d'attelages, on n'obtiendra pas la fatigue maxima en déplaçant la poutre sous le train supposé invariable. Il est plus rationnel d'assimiler le train à une charge uniforme que l'on déterminera avec discernement, et de supposer que la charge puisse se fractionner indéfiniment. Lorsque la charge mobile est une charge uniforme p, la charge dérivée est une force isolée placée à la tête du train; c'est en effet, par l'étude de l'influence d'une force isolée mobile que nous avons obtenu la fatigue maxima provoquée non seulement par le passage d'une charge uniforme, mais aussi par le fractionnement indéfini d'une charge de cette espèce (625 à 631).

Nous avons vu avec quelle facilité on dresse une épure qui donne les points d'inflexion de la poutre, déformée sous l'action d'une force isolée. Cette épure permet aussi de déterminer rapidement les moments fléchissants produits par le passage d'un système de forces isolées. Soit (fig. 334) LMN l'intégrale seconde de la charge; l'épure des inflexions donne immédiatement la ligne de repère E'F', pour le cas d'une force unique; en redressant la ligne de repère et en superposant les effets des diverses forces, on obtiendrait l'effet du système donné.

Cette méthode peut être recommandée pour le cas d'un pont tournant pour route. L'épure des inflexions est indispensable pour étudier l'effet de la charge vivante. On en déduit immédiatement l'influence du passage d'un chariot mobile.

Dans le cas d'une poutre encastrée, l'épure des inflexions est formée de deux droites (584); de là résulte, pour ce

cas, un tracé très-simple des moments fléchissants produits par une ou plusieurs forces mobiles.

§ VII. — Poutres a sections variables.

781. — Lorsque le moment d'inflexibilité de la poutre est variable, la méthode de la poutre mobile conduit à des opérations très-laborieuses. On intègre deux fois les charges; mais les deux autres intégrations doivent être recommencées pour chaque position de la poutre. Si l'on intègre par éléments très-petits, les opérations sont presque inabordables. La méthode des polygones d'intégration simplifie les constructions. Il suffit de tracer les intégrales successives de $1 : \varepsilon$ pour les différentes travées; on est à même de trouver rapidement les directrices des polygones d'intégration pour tous les segments de la poutre; on peut quelquefois remplacer, par des polygones, des arcs très-étendus des intégrales. Cela s'applique aussi à l'épure des dérivées. Il faut remarquer cependant que les lignes de repère spéciales doivent être tracées par points; la méthode des polygones d'intégration n'est plus applicable; ces lignes ne sont plus des paraboles.

782. Problèmes pratiques. — Le cas d'une charge uniforme qui se fractionne par travées donne lieu aux mêmes tracés que si la poutre était prismatique, sauf en ce qui concerne la position des directrices d'intégration et les bases d'intégration des η. Lorsque l'on suppose que la charge peut se fractionner indéfiniment, on est conduit à tracer certaines courbes de correction (629, 634); ces courbes ne sont déterminées que par leurs tangentes extrêmes; en chargeant des fractions de travées, on trouverait des enveloppées de ces courbes; mais pour les déterminer avec plus de précision, il est nécessaire de tracer, comme pour les poutres prismatiques, l'épure des inflexions dues à une force isolée.

Nous allons exposer une nouvelle méthode de résoudre

tous ces problèmes; elle consiste à utiliser les intégrales successives de la courbe des inverses du moment d'inflexibilité; on parvient ainsi à éviter toutes les intégrations qui ne s'appliquent qu'à une position de la charge et que l'on serait obligé de recommencer un grand nombre de fois.

783. Force isolée mobile. — Prenons d'abord le cas d'une poutre encastrée à ses deux extrémités. Soient : AB (fig. 335, fig. *a*) la poutre donnée, C le point d'application de la force. Si la poutre était libre en B, la ligne des M serait BCD; on tiendra compte de l'encastrement B en rapportant cette ligne à une ligne de repère EF à déterminer par les conditions de la déformation.

Prenons le point A comme origine des coordonnées; soient x l'abscisse d'une section quelconque, u l'abscisse du point d'application de la force. Les déformations de la poutre, dans l'hypothèse où la section B est libre, sont données par les formules :

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}(u - x)$$

$$\eta = \mathrm{P}\int_0^x \frac{u - x}{\varepsilon}\, dx \qquad (1)$$

$$y = \mathrm{P}\int_0^x dx \int_0^x \frac{u - x}{\varepsilon}\, dx.$$

Nous pouvons aussi considérer l'intégrale seconde qui donne y comme un moment statique et écrire (104):

$$y = \mathrm{P}\int_0^x (x - x')\frac{u - x'}{\varepsilon'}\, dx'. \qquad (2)$$

Si en particulier, nous nous plaçons au point d'application de la force, nous trouvons :

$$\eta_u = \mathrm{P}\int_0^u \frac{u - x}{\varepsilon}\, dx \qquad (3)$$

$$y_u = \mathrm{P}\int_0^u \frac{(u - x)^2}{\varepsilon}\, dx. \qquad (4)$$

Traçons les intégrales successives, à partir de l'origine,

de la courbe dont l'ordonnée est l'inverse de ε; soient I_1, I_2, I_3, ces intégrales; on a, d'après le théorème du numéro 104 :

$$I_2(u) = \int_0^u \frac{u-x}{\varepsilon}\,dx$$

$$2I_3(u) = \int_0^u \frac{(u-x)^2}{\varepsilon}\,dx.$$

En comparant ces valeurs aux formules (3) et (4), on a, en prenant la force P comme unité :

$$\eta_u = I_2(u) \qquad (5)$$

$$y_u = 2I_3(u). \qquad (6)$$

Cela va nous permettre de déterminer immédiatement pour une position donnée u de la force, les éléments des courbes des η et des y qui suffisent pour trouver la ligne de repère EF. Soient A'C'I_2, A''C''I_3 les intégrales I_2 et I_3; η_u est l'ordonné du point C' et comme la partie CB de la poutre n'est pas déformée, l'horizontale C'B' est une partie de la ligne des η. D'après la formule (6), y_u est le double de l'ordonnée du point C''; nous tiendrons compte du coefficient 2 en réduisant de moitié l'échelle des y. Le point C'' est donc un point de la ligne des y. Pour la partie non déformée la ligne des y est d'ailleurs une droite C''B'' dont la dérivée est η_u. Nous trouverons cette droite C''B'' en intégrant C'B' avec une base double pour tenir compte du coefficient 2.

Remarquons que la droite C''B'' n'est pas tangente à la courbe I_3; la tangente au point C'' de la courbe I_3 a un coefficient angulaire double de la droite C''B''. Cette dernière touche la courbe des y représentée par l'équation (2); nous avons figuré cette courbe en pointillé; mais il est inutile de la tracer.

Nous connaissons maintenant les extrémités A', B', A'', B'' des lignes des η et des y pour la position C de la force; nous obtiendrons les lignes de repère en appliquant

l'une ou l'autre des méthodes des numéros 636 à 639. Appliquons, par exemple, celle du numéro 638. Le point moyen N′ des η' a pour ordonnée la dérivée de la corde A″B″; les moments principaux M et N s'obtiennent en prenant les dérivées des pseudo-médianes A′N′ et N′B′; la droite EF est déterminée par deux points M et N. En effectuant ces constructions pour une série de positions de la force, on obtient tous les points d'inflexion analogues à H et K. On donne à l'épure des inflexions sa forme ordinaire, en rapportant dans la figure *d* les points obtenus dans la figure *a*.

Dans le cas d'une poutre à plusieurs travées, on commence par dresser pour chaque travée l'épure des inflexions en supposant la travée encastrée à ses deux extrémités. On peut alors opérer comme au numéro 626. Pour chaque position de la force sur une travée, on trouve immédiatement la transformée droite, on trace la ligne des M′ et on obtient les véritables points d'inflexion. Connaissant les véritables courbes des inflexions, on obtient facilement les moments fléchissants et les efforts tranchants (par dérivation) produits par une ou plusieurs forces isolées mobiles (780). On en déduit aussi la position qu'il faut donner à une charge uniforme pour réaliser dans une section les moments fléchissants limites.

784. Charge uniforme mobile. — Soient (fig. 336, fig. *a*) : AB la travée que nous supposons d'abord encastrée à ses deux extrémités, u la longueur AB sur laquelle agit une charge uniforme égale à l'unité. Prenons comme ligne des M, la ligne BCE que l'on obtiendrait si l'extrémité B était rendue libre. On trouve en raisonnant comme au numéro précédent :

$$\eta_u = \int_0^u \frac{(u-x)^2}{2}\frac{dx}{\varepsilon} = I_2(u) \qquad (1)$$

$$y_u = \int_0^u \frac{(u-x)^3}{2}\frac{dx}{\varepsilon} = 3I_4(u) \qquad (2)$$

On voit qu'au moyen des intégrales de la courbe des inverses du moment d'inflexibilité, on peut trouver facilement les extrémités des lignes des η et des y pour une position de la charge. On en déduit alors la ligne de repère FG des moments fléchissants.

Supposons que l'on donne la charge p ou ce qui revient au même, la parabole ACB (fig. 336, fig. *b*) qui représente les moments fléchissants lorsque la travée est posée sur deux appuis et complètement chargée. Si le segment Ac est seul chargé, on prendra comme ligne des M la ligne B'CA; la transformée droite FG est déterminée par les points H et K que l'on obtient en utilisant la figure *a*; on en déduit immédiatement la ligne de repère F'G' pour la poutre à plusieurs travées. On peut de cette manière et en reproduisant les opérations du numéro 629 déterminer les courbes limites des moments fléchissants dans le cas d'une charge qui se fractionne indéfiniment.

785. Charges paraboliques mobiles. — On peut étendre la méthode précédente au cas d'une charge mobile, couvrant la poutre sur une longueur u et s'exprimant par la formule

$$p = \frac{(u-x)^{i-3}}{1.2.3\ldots(i-3)}.$$

On trouve, en effet :

$$M = \frac{(u-x)^{i-1}}{1.2.3\ldots(i-1)},$$

$$\eta = \int_0^u \frac{(u-x)^{i-1}}{1.2.3\ldots(i-1)} \frac{dx}{\varepsilon} = I_i(u)$$

$$y_u = \int_0^u \frac{(\omega-x)^i}{1.2.3\ldots(i-1)} \frac{dx}{\varepsilon} = iI_{i+1}(u).$$

Au moyen des intégrales I_i et I_{i+1}, on trouve les extrémités des lignes des η et des y et on en déduit la ligne de repère des M.

Une charge parabolique dont la tête a pour abscisse u s'exprime par une formule de la forme :

$$p = a + b(u - x) + C\frac{(u - x)^2}{1.2} + \cdots$$

On peut la décomposer en plusieurs charges analogues à celle que nous venons d'examiner et appliquer le théorème de l'indépendance des effets des forces. Cette méthode s'applique aussi au cas d'une suite de charges paraboliques accompagnées de forces isolées.

§ VIII. — Poutres en arc.

786. Pour une position de la charge, traçons la ligne des pressions; traçons aussi la ligne des pressions pour la charge dérivée. Les tensions moléculaires des fibres extrêmes passent par un maximum ou un minimum dans les sections où les dérivées de ces tensions s'annullent. Or, la tension d'une fibre extrême s'annulle lorsque la pression passe par l'extrémité opposée du noyau central. Traçons donc les lieux des extrémités du noyau central; ces lieux sont coupés en certains points par la courbe des centres de pression pour la charge dérivée; ces points déterminent les sections où les tensions des fibres extrêmes passent par un maximum ou un minimum. Pour chaque position de la charge, nous pourrons donc calculer les tensions maxima et minima et les représenter par des courbes. De même la force tangentielle passe par un maximum dans la section où la dérivée $\frac{dk}{du}$ de l'effort tranchant passe par zéro, c'est-à-dire dans les sections où la pression dérivée est normale à la section qu'elle sollicite; on peut aussi construire la courbe des forces tangentielles maxima.

Lorsqu'il s'agit d'une charge uniforme qui peut se fractionner indéfiniment, on commence par étudier l'effet de la charge dérivée qui se réduit à une force isolée. On opère comme pour les poutres droites. Pour chaque fibre extrême,

on dresse une épure qui donne pour chaque position de la force les sections où la tension s'annulle. On en déduit le mode de sollicitation qui provoque dans chaque section la fatigue maxima de l'une ou l'autre fibre extrême. Pour pouvoir calculer les dimensions il faut déterminer les plus grands moments de la pression autour des extrémités du noyau central.

Les méthodes que nous avons exposées dans notre mémoire permettent de résoudre graphiquement tous ces problèmes. Mais les opérations à faire sont très-laborieuses parce que pour chaque position de la charge ou de la charge dérivée, il faut recommencer la plupart des intégrations. Comme pour les poutres droites à sections variables, nous allons exposer une méthode qui permet d'utiliser les mêmes intégrales pour toutes les positions de la charge.

787. Charge isolée mobile. — Soit AB l'arc courbe encastré à ses deux extrémités. Rendons d'abord l'extrémité B entièrement libre; la force P produit une rotation de la section B autour d'un point D; ce centre de rotation D est le centre de percussion de l'arc AC conjugué à la force P. Si la section B est encastrée, il doit se développer dans cette section une réaction capable d'annuler la rotation D. Nous avons vu au numéro 677 que cette réaction s'obtient facilement quand on connait le point D. Le problème est donc ramené à trouver le point D en utilisant des courbes intégrales indépendantes de la position de la force P.

Prenons un axe des y passant par le point A, un axe des x horizontal; dans une section x, y, le moment fléchissant M, l'effort longitudinal N et l'effort tranchant K sont donnés par les formules :

$$M = P(u - x)$$

$$N = P\frac{dy}{ds}$$

$$K = P\frac{dx}{ds}$$

Le déplacement de la section $(x + xd, y + dy)$ par rapport à la section x, y se compose d'une rotation $d\psi$ et des deux translations dues à la compression et au glissement. Nous considérons ces translations comme des couples de rotation. La rotation résultante ψ est la somme des composantes. Le centre de la rotation résultante (x'', y'') s'obtiendra en prenant deux équations de moment. Nous prendrons comme axe des moments la ligne d'action de la force et l'axe des x; nous trouvons :

$$\psi = \int_0^u \frac{P(u-x)ds}{EI} \tag{1}$$

$$\psi(u-x'') = \int_0^u \frac{P(u-x)^2 ds}{EI} + \int_0^u P\left[\frac{5}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]\frac{ds}{E\omega} \tag{2}$$

$$\psi y'' = \int_0^u \frac{P(u-x)y\,ds}{EI} - \frac{3}{2}\int_0^u P\frac{dy}{ds}\frac{dx}{E\omega}. \tag{3}$$

Introduisons une fonction de x déterminée par l'équation

$$U = \frac{1}{EI}\frac{ds}{dx}. \tag{4}$$

Soient U_1, U_2, ... les intégrales successives de cette fonction prises de zéro à u.

Posons aussi :

$$V = \frac{y}{EI}\frac{ds}{dx} \tag{5}$$

$$X = \left[\frac{5}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]\frac{1}{E\omega}\frac{ds}{dx} \tag{6}$$

$$Y = -\frac{3}{2}\frac{dy}{ds}\frac{1}{E\omega} \tag{7}$$

et soient V_1, V_2 ... X_1, X_2 ... Y_1 Y_2 ... les intégrales successives de ces fonctions depuis zéro jusque u.

Si nous prenons la force P comme unité, les équations

(1) (2) (3) deviennent, en remarquant que les moments de divers ordres sont des intégrales,

$$\psi = U_2 \tag{8}$$

$$\psi(u - x'') = 2U_3 + X_1 \tag{9}$$

$$\psi y'' = V_2 + Y_1. \tag{10}$$

Toutes les intégrales des seconds membres peuvent être représentées pour u variable, sans faire d'hypothèse sur la position de la force. Les courbes intégrales seront disposées de manière à obtenir immédiatement les sommes $2U_3 + X_1$, $V_2 + Y_1$ (fig. 338). Pour une valeur de u donnée, on a $BC = 2U_3 + X_1$; si CD est l'intégrale de l'ordonnée U_2, c'est-à-dire une droite dont le coefficient angulaire est deux fois plus petit que celui de la tangente à la courbe $2U_3$, on aura $BD = u - x''$. On trouvera de même $B'C' = V_2 + Y_1$, et en menant C'D' parallèlement à CD, $C'D' = y''$.

Plaçons la force dans une série de positions; nous obtiendrons les différentes positions du centre D. Pour chacune de ces positions, appliquons la construction déja rappelée du numéro 677, nous obtiendrons la réaction qui se développe dans la section B; on en déduit facilement la ligne des pressions qui est formée de deux droites.

Pour pouvoir appliquer cette construction, il est nécessaire de connaître le centre de gravité de l'arc et deux centres de percussion. Le centre de gravité x_1 y_1 est déterminé par les formules suivantes où l est la projection horizontale de l'arc AB :

$$(l - x_1)\int_0^l \frac{ds}{EI} = \int_0^l (l - x)\frac{ds}{EI}$$

$$y_1 \int_0^l \frac{ds}{EI} = \int_0^l \frac{y\,ds}{EI}$$

formules qui peuvent aussi s'écrire :

$$(l - x_1)\,U_1 = U_2$$

$$y_1 U_1 = V_1.$$

Les intégrales sont prises pour $u = l$. Les tangentes aux extrémités de la courbe U_2 se coupent sur la droite $x = x_1$. L'ordonné y_1 s'obtient en menant par l'extrémité de la courbe V_1, une parallèle à la tangente extrême de U_2.

La position du point D pour $u = l$, donne l'un des centres de percussion; c'est le centre de percussion conjugué à la verticale du point B.

Pour en trouver un autre, prenons l'axe des x comme axe de rotation. Il suffit (260) de calculer l'ordonnée y_3 de ce centre de percussion; on l'obtient par la formule (14) du numéro 670. On peut aussi considérer ce point comme le centre de la rotation produite par une force dirigée suivant l'axe ox et sollicitant la section B. En raisonnant comme au numéro 787, on trouve :

$$y_3 \int \frac{y\,ds}{EI} = \int \frac{y^2\,ds}{EI} + \int \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \right] \frac{ds}{E\omega}.$$

D'où l'on déduit :

$$y_3 V_1 = \int V y\,dx - X_1 + \frac{7}{2} \int \frac{ds}{E\omega}.$$

Il suffit d'effectuer deux nouvelles intégrations.

788. Charge uniforme ou parabolique. Une charge uniforme s'étend de l'abscisse o à l'abscisse u; nous pouvons encore appliquer les formules (1) (2) (3) du numéro précédent, mais nous devons supposer $P = p(u - x)$, et dans les moments $P(u - x)$ introduire le dénominateur 2 pour tenir compte de la réduction du bras de levier. Prenons la charge p comme unité, remplaçons les moments de divers ordres par des intégrales, nous trouvons :

$$\psi = U_3$$
$$\psi(u - x'') = 3U_4 + X_3$$
$$\psi y'' = V_3 + Y_3.$$

On est conduit à des constructions du même genre que celles que nous avons rencontrées dans le cas d'une force isolée. En reproduisant les considérations du numéro 785,

on étendrait la méthode au cas d'une charge parabolique ou d'une suite de charges concentrées et paraboliques.

789. Fausse position. — Avant de commencer les calculs d'une poutre en arc, on ne connait pas la loi de variation des sections transversales. Généralement on suppose d'abord la poutre prismatique; on détermine l'état de sollicitation dans cette hypothèse et on calcule les dimensions. Il faut alors, et c'est ce qui n'a pas toujours lieu, recommencer les calculs en introduisant les dimensions vraies dans les formules de déformation. C'est, en définitive, employer la méthode des fausses positions ou des approximations successives.

Au lieu de supposer la section prismatique dans les premiers calculs, il est plus rationnel de se rapprocher autant que possible de la loi de variation des sections. On ne connait pas cette loi, mais on peut s'en rapprocher et profiter de l'indétermination qui subsiste pour simplifier les intégrations.

Supposons que l'arc soit chargé complètement et que la ligne des pressions coïncide avec la fibre moyenne; si l'arc a une section d'égale résistance, la section ω sera proportionnelle à l'effort longitudinal N. Cet effort est la pression; si les charges sont verticales, la projection horizontale de la pression est constante; donc le produit $N\frac{dx}{ds}$ est constant. Il en est de même du produit $\omega\frac{dx}{ds}$; donc $\frac{ds}{E\omega}$ est proportionnel à dx. Supposons, en outre, que le rayon de gyration r varie assez peu pour être supposé constant; on pourra admettre :

$$\frac{ds}{E\omega r^2} \text{ ou } \frac{ds}{EI} = dx.$$

En réalité les deux quantités que nous réunissons par le signe d'égalité sont simplement proportionnelles; mais

comme le coefficient E est un facteur commun dans tous les termes des déformations on peut prendre E arbitrairement; cela revient à multiplier toutes les rotations par un facteur constant; le centre des rotations ne change pas.

Cette formule donne une loi de variation des sections qui se rapproche plus de la réalité que l'hypothèse d'une section prismatique; elle a d'ailleurs le grand avantage de simplifier considérablement les calculs. On trouve, en effet,

$$U = 1,\ U_1 = u\ U_2 = \frac{u^2}{2} \cdots;$$

on a aussi $V = y$, donc les intégrales V_1, V_2, ... sont les intégrales de la fibre moyenne. On a enfin :

$$X = r^2\left[\frac{5}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]$$

$$Y = -\frac{3r^2}{2}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds}.$$

La valeur de X peut aussi se mettre sous la forme :

$$X = r^2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 1\right].$$

790. Cas particulier. — L'hypothèse que nous venons d'admettre conduit surtout à des constructions simples lorsqu'on néglige l'influence des compressions et des glissements. Il faut alors supprimer les termes qui dépendent des fonctions X et Y. Dans le cas d'une force isolée, on trouve en appliquant les formules (8) (9) et (10) du numéro 787,

$$x'' = \frac{u}{3},\ y'' = \frac{2V_2}{u^2}.$$

Il est facile de voir que l'ordonnée y'' est l'ordonnée constante qu'il faudrait substituer aux ordonnées y pour que le moment statique des aires ydx autour de la droite $x = u$ ne soit pas changé. En effet, le moment statique du

rectangle uy'' a pour valeur $y''\frac{u_2}{2}$ et l'équation qui donne la valeur de y'' exprime précisément que ce moment est égal à V_2, moment statique des aires ydx.

Lorsque l'arc a la forme d'une parabole du second degré, on peut trouver très-simplement le centre de rotation sans construire l'intégrale V_2. Soit E (fig. 337) le point de la parabole situé à égale distance de la force et de l'axe oy; le point (x'', y'') se trouve aux deux tiers de la droite AE. Cette construction résulte immédiatement d'une propriété de la transformée droite d'un arc parabolique (618, Variante I). Quand la force se déplace, le point D décrit une parabole; l'antipolaire MB′ enveloppe une conique.

Le cas d'une charge uniforme se traite avec la même facilité; on trouve :

$$x'' = \frac{u}{4} \quad y'' = \frac{6V_3}{u^3}.$$

L'ordonnée y'' est l'ordonnée constante qu'il faut substituer aux ordonnées y pour que le moment d'inertie autour de la droite $x = u$ des aires ydx prises de o à u, ne soit pas changé.

On arrive à des résultats analogues pour une charge p donnée par l'équation

$$p = \frac{(u-x)^{i-3}}{1.2.3\ldots i-3}.$$

On trouve

$$x'' = \frac{u}{i+1}, \quad y'' = \frac{V_i}{u^i} 1.2.3.\ldots i.$$

L'ordonnée y'' est l'ordonnée constante qu'il faut substituer aux ordonnées y pour que le moment d'ordre $i-1$, autour de la droite $x = u$, des aires ydx prises de o à u, ne soit pas changé.

Lorsqu'on a déterminé le centre de rotation en négli-

geant les compressions et les glissements, on peut déterminer le déplacement qu'il faut faire subir à ce point pour obtenir la position exacte du centre de rotation. Dans le cas d'une force isolée, on a :

$$\Delta x'' = -\frac{2X_1}{u^2},$$

$$\Delta y'' = \frac{2Y_1}{u^2}.$$

791. Théorème. On néglige les compressions et les glissements; on considère la ligne des pressions comme la ligne des moments fléchissants d'une poutre droite qui serait la projection horizontale de l'arc. Si on prend comme ligne de repère la transformée droite de l'arc, ces moments fléchissants appartiennent à une poutre encastrée à ses extrémités.

En effet, la rotation élémentaire $d\psi$ d'une section de l'arc s'exprime par la formule (16) du numéro 672

$$d\psi = qcdm = qcdx.$$

Exprimons que ces rotations se composent en une rotation égale à zéro; nous trouvons :

$$\int cdx = 0$$
$$\int cxdx = 0$$
$$\int cydx = 0.$$

L'excentricité c est la partie d'ordonnée verticale comprise entre la ligne des pressions et la fibre moyenne; on peut considérer cdx comme l'élément d'aire comprise entre ces deux lignes; les deux premières équations expriment que les poids de ces aires se font équilibre. On peut dire aussi qu'entre les verticales des extrémités de l'arc et une droite quelconque, la fibre moyenne de l'arc et la ligne des pressions déterminent deux aires dont les poids sont égaux et tombent sur la même verticale. On trouve là transformée droite de l'une ou l'autre de ces lignes en transformant ces aires en un trapèze ayant même poids et tombant sur

la même verticale. Or on sait que si la poutre est encastrée à ses extrémités, c'est la transformée droite de la ligne des M qu'il faut prendre comme ligne de repère. Cette transformée droite est aussi la transformée droite de l'arc; cela démontre le théorème.

On peut appliquer ce théorème à la détermination de la ligne des pressions. On commence par tracer la transformée droite de l'arc et le lieu des moments fléchissants d'une poutre encastrée. Prenons la transformée droite comme ligne de repère; soit M l'ordonnée de la ligne des M tracée; l'ordonnée de la ligne des pressions inconnues est $z = \alpha M$. On a donc

$$c = \alpha M - y.$$

Nous déterminerons le coefficient de réduction α au moyen de l'équation

$$\int cy\,dx = 0$$

qui donne

$$\alpha = \frac{\int y^2 dx}{\int My\,dx}.$$

Cette méthode ne convient pas pour une charge mobile, parce que l'intégrale du dénominateur doit être recommencée pour chaque position de la charge. Dans ce cas, il vaut mieux se contenter de déterminer par l'épure des moments fléchissants, les points où les réactions des sections extrêmes coupent la transformée droite. On construit un autre point de l'une de ces réactions en déterminant l'antipôle d'une droite passant par le centre de rotation déterminé par les méthodes précédentes.

Prenons, par exemple, le cas d'une force isolée; l'épure des inflexions de la poutre encastrée est formée de deux droites. En rapportant ces points d'inflexion sur la transformée droite de l'arc, on trouve les points F et H de la ligne des pressions. En prenant l'antipôle de la droite AE, on trouve un autre point K de la droite MB'; le problème est résolu. Si l'arc courbe est parabolique, les droites AE

forment un système du premier degré en u; les point K forment une échelle homographique de la variable u.

Remarques. — 1° La transformée droite de l'arc est aussi le diamètre de l'ellipse centrale d'inertie de l'arc conjugué aux cordes verticales. On peut vérifier cette propriété par l'analyse. Mais on y arrive aussi de la manière suivante: supposons la poutre encastrée à l'extrémité gauche; introduisons à l'extrémité droite la réaction et le couple qui se développent dans le cas de la poutre droite encastrée. Le moment fléchissant M dans une section de l'arc sera le moment fléchissant de la poutre encastrée. Composons les rotations. La rotation résultante est donnée par la formule :

$$\psi = \int M dx.$$

Elle égale à zéro. Donc les rotations se composent en une translation. La translation verticale a pour valeur

$$\int M (l - x)\, dx.$$

Elle est aussi égale à zéro. Le seul déplacement de la section extrême est une translation horizontale

$$e = \int M y dx.$$

Pour annuler cette translation, il faut introduire dans la section extrême une force passant par le centre de gravité de l'arc. Cette force (676) est conjuguée aux perpendiculaires à la translation; elle est donc conjuguée aux cordes verticales de l'ellipse centrale d'inertie. Elle est donnée par la formule (20) du numéro 676 qui devient :

$$e \cos i = F . \int y^2 dx . \cos^2 i.$$

Dans cette formule i est l'angle de la force F avec l'horizon; nous avons remplacé $R^2\, dm$ par sa valeur; cette valeur est l'intégrale des $y^2 dx \cos^2 i$, si on prend la direction de la force comme ligne de repère des y. Nous ferons la même hypothèse dans l'intégrale qui donne la valeur de e et nous trouverons :

$$F \cos i = \frac{\int M y dx}{\int y^2 dx}.$$

Nous obtiendrons l'état de sollicitation de l'arc en composant les forces verticales de la poutre encastrée avec la force F; nous obtiendrons ainsi une ligne des résultantes ou des moments fléchissants; la ligne d'action de la force F est la ligne de repère. Cela démontre la propriété que nous avons avancée. Remarquons aussi qu'en prenant la force F comme force auxiliaire, on réduit les moments fléchissants dans le rapport 1 : F cos i; ce rapport a pour valeur

$$\alpha = \frac{\int y^2 dx}{\int M y dx}.$$

C'est la valeur que nous avons trouvée précédemment.

2° Le théorème précédent est encore applicable au cas où la section transversale varie d'une manière quelconque. Il faut alors supposer que la poutre encastrée ait pour moment d'inflexibilité

$$\varepsilon = EI \frac{dx}{ds}.$$

Les formules et les démonstrations ne subissent que de légères modifications.

3° On peut même étendre le théorème au cas où l'on tient compte des glissements et des compressions. Mais alors il faut dans la poutre encastrée tenir compte des glissements verticaux. On doit attribuer à la poutre encastrée non seulement le moment d'inflexibilité $\varepsilon = EI \frac{dx}{ds}$, mais une section conventionnelle donnée par la formule

$$\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right].$$

Il est évident qu'alors la ligne de repère de la ligne des pressions considérée comme lieu des moments fléchissants de la poutre encastrée est conjuguée, aux cordes verticales, dans l'ellipse centrale d'inertie des éléments de l'arc décomposés en leurs points fictifs (671).

NOTE III.

Sur les moments des divers ordres.

792. Intégrales-moments. — Soient : $y = f(x)$, l'équation d'une courbe; x_0, une abscisse initiale; x, une abscisse variable; M_n, le moment d'ordre n autour de l'axe x, des aires ydx, prises de x_0 à x. On a (104) la formule

$$M_n = \int_{x_0}^{x} f(x')\,dx'\,(x - x')^n.$$

Appelons I_1, I_2, I_3... les intégrales successives de la fonction y, prises de x_0 à x. En appliquant les formules des numéros 104 et 105, nous trouvons :

$$M_0 = \int_{x_0}^{x} f(x')\,dx' = I_1$$

$$M_1 = \int_{x_0}^{x} M_0 dx = I_2$$

$$M_5 = 3\int_{x_0}^{x} M_2 dx = 1.2.3.I_4.$$

En continuant de la même manière, on trouve :

$$M_n = 1.2.3\ldots n\,I_{n+1}.$$

D'où l'on tire :

$$I_{n+1} = \frac{M_n}{1.2.3\ldots n}.$$

En remplaçant les intégrales I_{n+1} et M_n par leurs valeurs, on retrouve une formule d'analyse

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - x')^n}{1.2.3\ldots n} f'(x)dx'. \quad (1)$$

Réciproquement, en partant de cette formule d'analyse, nous aurions pu démontrer d'une autre manière les propriétés que nous venons de rappeler.

Nous désignerons le second membre de la formule (1) sous le nom d'intégrale moment. C'est le moment d'ordre n à un facteur constant près. C'est une intégrale particulière de l'ordre $n+1$; l'intégrale générale contient $n+1$ constantes; dans l'intégrale moment les constantes sont déterminées par la condition, qu'au point x_0, la courbe intégrale ait avec l'axe des x un contact d'ordre n; on peut dire aussi, dans un langage figuré, que l'intégrale moment est l'intégrale qui passe par $n+1$ points (x_0, o). Rappelons aussi (106) que si on trace une intégrale quelconque d'ordre $n+1$, on trouvera l'intégrale moment en prenant, comme ligne de repère, une parabole de degré n osculatrice à la courbe.

Notations. — Nous rencontrerons souvent dans ce qui suit des expressions de la forme :

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\ \frac{(x-x')^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Pour simplifier les écritures nous les représenterons par les symboles

$$x^{\cdot n}\,(x-x')^{\cdot n}.$$

Nous écrirons, par exemple,

$$\int_0^x x^{\cdot n}dx = x^{\cdot n+1}.$$

Comme application, proposons-nous de calculer

$$\int_0^h (h-x)^{\cdot m}x^{\cdot n}dx.$$

Cette expression est l'intégrale moment de $x^{\cdot n}$; nous

l'obtiendrons en effectuant $m + 1$ intégrations successives ; nous trouvons

$$h^{\cdot n+1}, \quad h^{\cdot n+2}, \quad \ldots, \quad h^{\cdot m+n+2}.$$

On a donc :

$$\int_0^h (h - x)^{\cdot m} x^{\cdot n} dx = h^{\cdot m+n+1}. \tag{2}$$

En mettant cette formule sous la forme ordinaire, on a :

$$\int_0^h (h-x)^{\cdot m} x^{\cdot n} dx = \frac{1.2.3 \ldots m \times 1.2.3 \ldots n}{1.2.3 \ldots (m+n+1)} h^{m+n+1}.$$

Si dans la formule (2), nous posons $x = 1 + z$, $h = 2$, il vient

$$\int_{-1}^{+1} (1 - z)^{\cdot m} (1 + z)^{\cdot n} dz = 2^{\cdot m+n+1}. \tag{3}$$

L'expression générale d'une intégrale moment devient alors

$$I_{n+1} = \int_{x_0}^{x} (x - x')^{\cdot n} f(x') dx'.$$

Par un changement de variable, on peut ramener cette intégrale à une autre intégrale prise entre les limites 0 et 1, posons

$$x' = x_0 + t(x - x_0)$$

il vient

$$I_{n+1} = (x - x_0)^n \int_0^1 (1 - t)^{\cdot n-1} f[x_0 + t(x - x_0)] dt.$$

793. Formule de Taylor. — Une fonction $F(x)$ peut toujours être considérée comme une intégrale d'ordre n de sa dérivée $F^{(n)}(x)$. Menons au point x_0 de la courbe $F(x)$ la parabole osculatrice de degré $n - 1$; cette parabole a pour équation

$$y = F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \ldots + (x - x_0)^{\cdot n-1} F^{(n-1)}(x_0).$$

Nous savons que $F(x) - y$ représente l'intégrale moment de $F^{(n)}(x)$; on a donc

$$F(x) - y = \int_{x_0}^{x} (x - x')^{n-1} F^{(n)}(x')\, dx'.$$

En remplaçant y par sa valeur, on trouve

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \cdots + (x - x_0)^{n-1} F^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - x')^{n-1} F^{(n)}(x')\, dx'.$$

C'est la formule de Taylor; le reste a la forme donnée par Laplace; c'est une intégrale moment.

794. Généralisation. Loi suprême de Wronski. — On donne une courbe $y = F(x)$; au point x_0 on mène une autre courbe $y = f(x)$ et on calcule les paramètres de cette dernière de telle façon qu'il y ait entre les deux courbes un contact d'ordre $n - 1$. En remplaçant la courbe $F(x)$ par $f(x)$, on commet une erreur $R = F(x) - f(x)$; cette fonction R peut être considérée comme l'intégrale de sa dérivée d'ordre n; la condition du contact exprime que c'est l'intégrale moment; on a donc :

$$\frac{d^n R}{dx^n} = F^{(n)}(x) - f^{(n)}(x),$$

$$R = \int_{x_0}^{x} (x - x')^{n-1} [F^{(n)}(x') - f^{(n)}(x')]\, dx'.$$

On en déduit :

$$F(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} (x - x')^{n-1} [F^{(n)}(x') - f^{(n)}(x')]\, dx'.$$

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$, des fonctions données; prenons

$$f(x) = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 \cdots + A_n\varphi_n = \Sigma A\varphi(x)$$

Déterminons les paramètres A de manière à satisfaire à

la condition du contact; ces paramètres sont donnés par n équations linéaires de la forme :

$$\Sigma A\varphi^{(i)}(x_0) = F^{(i)}(x_0).$$

On aura alors le développement

$$F(x) = \Sigma A\varphi(x) + \int_{x_0}^{x} (x - x')^{n-1} [F^{(n)}(x') - \Sigma A\varphi^{(n)}(x')]\, dx'.$$

C'est la loi suprême de Wronski; le reste est l'intégrale moment pour l'aire limitée par la courbe

$$z = F^{(n)}(x) - \Sigma A\varphi^{(n)}(x).$$

En calculant les valeurs de A, on introduit des déterminants qui sont les Wronskiens; ainsi le dénominateur commun des valeurs de A est le Wronskien des fonctions φ.

Si les fonctions φ sont des fonctions entières de degré égal au plus à $n - 1$, le reste est celui de la formule de Taylor; le développement est une fonction entière qui doit être identique au développement de Taylor. Si l'on prend

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = x - x_0, \quad \varphi_3 = (x - x_0)^2 \cdots \varphi_n = (x - x_0)^{n-1}$$

l'identité est absolue; dans d'autres cas, la forme peut être différente. Prenons, par exemple,

$$\varphi_i = \left(1 - \frac{x - x_0}{h}\right)^i \left(\frac{x - x_0}{h}\right)^{n-i-1}.$$

Nous devons retrouver comme coefficients des quantités proportionnelles aux ordonnées du polygone d'intégration de la fonction entière fournie par le développement de Taylor.

La loi suprême de Wronski n'est pas toujours applicable. Nous avons dit que les valeurs de A avaient pour dénominateur commun un déterminant qui est le Wronskien des fonctions φ. Si pour x_0, ce déterminant s'annule, les

valeurs de A sont infinies ou indéterminées. L'indétermination ne doit pas nous arrêter longtemps; elle ne se présenterait que si les numérateurs des valeurs de A s'annulaient également; comme ces numérateurs dépendent de la fonction $F(x)$ et de ses dérivées, cette fonction cesserait d'être une fonction quelconque. Nous pouvons donc dire que si le Wronskien des fonctions φ s'annule pour $x = x_0$, la loi suprême n'est généralement pas applicable. On est alors conduit à choisir une autre valeur de x_0. Mais si le Wronskien dont il s'agit est nul pour toutes les valeurs de x, il y a impossibilité absolue.

Si les fonctions φ ont entre elles une relation linéaire, on peut exprimer l'une des fonctions φ linéairement au moyen des autres; l'expression $\Sigma A\varphi$ ne contient en réalité que $n - 1$ paramètres. Il est donc impossible d'assurer un contact d'ordre $n - 1$, si la fonction $F(x)$ conserve toute sa généralité. On vérifie, en effet, que dans ce cas le Wronskien est identiquement nul.

Réciproquement ce n'est que lorsque les fonctions ont entre elles une relation linéaire, que le Wronskien est identiquement nul et qu'il y a impossibilité absolue d'appliquer la loi suprême. En effet, si le Wronskien est nul, on peut résoudre les équations :

$$\Sigma A\varphi^{(i)}(x) = 0 \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } n - 1.$$

Les rapports des quantités A sont déterminés par les $n - 1$ premières équations; la dernière équation sera une conséquence des autres. Prenons l'une des quantités A arbitrairement et constante; faisons varier x; les autres paramètres resteront aussi constants. En effet, si on prend les dérivées des équations précédentes on trouve que les $\frac{dA}{dx}$ sont fournis par les mêmes équations que les valeurs de A; donc si l'une des dérivées est nulle, toutes les autres

le sont. Il résulte de là qu'il existe des valeurs constantes de A telle que

$$\Sigma A\varphi(x) = 0.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration précédente est en défaut lorsque les déterminants proportionnels aux quantités A s'annulent; alors, même en se donnant l'une des quantités A, l'indétermination subsiste. Supposons que cette circonstance se présente pour quelques valeurs critiques $x_1, x_2, x_3 \ldots$; on peut affirmer qu'entre ces valeurs il y a une relation linéaire entre les fonctions φ; mais rien ne prouve que pour ces valeurs critiques les coefficients A ne profitent pas de leur indétermination pour subir des accroissements brusques. Dans chaque région, on peut déterminer les valeurs de A en utilisant les équations en nombre infini que l'on déduit de l'existence de la relation linéaire; on a pour m quelconque

$$\Sigma A\varphi^{(m)}(x) = 0.$$

Nous pouvons lever l'indétermination aux points critiques en écrivant un certain nombre d'équations de ce genre; une seule pour $m = n$ suffira généralement. On peut donc affirmer dans ce cas que les variations brusques des coefficients A ne se produiront pas, à moins que les dérivées $\varphi^m(x)$ ne soient discontinues. C'est dire que les variations brusques des coefficients de la relation linéaire ne sont pas à craindre pour les fonctions que tout le monde a toujours désignées sous le nom de fonctions analytiques (1).

Il pourrait se faire enfin que les valeurs de A soient toujours indéterminées; mais alors il y aurait d'autres

(1) M. Peano, professeur à l'Université de Turin, a donné un exemple (Mathesis, 1889, p. 75) où le Wronskien est identiquement nul, sans qu'il y ait de relation linéaire. La relation linéaire existe, mais les coefficients subissent une augmentation brusque provoquée artificiellement par des discontinuités dans les dérivées secondes.

Wronskiens qui s'annuleraient identiquement et la relation linéaire existerait entre un certain nombre des fonctions φ.

796. Ordonnées moyennes de divers ordres. — On donne une courbe quelconque $y = f(x)$; déterminons l'ordonnée constante qu'il faut substituer aux ordonnées y pour que, autour de l'axe X, le moment d'ordre p des aires ydx prises de x à X ne soit pas changé; cette ordonnée est l'ordonnée moyenne d'ordre p. Elle est donné par l'équation :

$$y_p = \frac{\int_x^X (X - z)^p f(z)\, dz}{\int_x^X (X - z)^p\, dz}$$

ou

$$y_p = (p + 1) \frac{\int_x^X (X - z)^p f(z)\, dz}{(X - x)^{p+1}}.$$

Considérons les intégrales comme des limites de sommes; prenons des dz égaux; attribuons aux points de la courbe des poids représentés par $(X - z)^p$; l'ordonnée y^p n'est autre que la limite de l'ordonnée du centre de gravité de ces poids. Lorsque p est nul, on retrouve l'ordonnée moyenne ordinaire; c'est une moyenne arithmétique; les poids des points sont égaux à l'unité.

Nous avons déjà rencontré ces ordonnées moyennes dans la théorie des arcs courbes (790). On les rencontre aussi dans la formule de Taylor. Le reste de cette formule a pour valeur l'intégrale moment

$$\int_{x_0}^{X} (X - z)^{n-1} f(z).$$

On en déduit la forme de Lagrange en remplaçant $f(z)$ par une certaine valeur constante intermédiaire $f(z_1)$; $f(z_1)$ est évidemment l'ordonnée moyenne d'ordre $n - 1$.

Posons dans la valeurs de y_p,

$$z = x + t(X - x),$$

il vient

$$y_p = (p+1)\int_0^1 (1-t)^p f[x+t(X-x)]\,dt.$$

Si $X - x$ est constant, x variable, on a

$$\frac{dy_p}{dx} = (p+1)\int_0^1 (1+t)^p f'[x+t(X-x)]\,dt.$$

Si on désigne par y'_p l'ordonnée moyenne d'ordre p pour la dérivée $y' = f'(x)$, on peut écrire

$$\frac{dy_p}{dx} = (p+1)\,y'_p.$$

Nous avons appliqué un cas particulier de cette relation à la fin du numéro 767. Il s'agissait de mener la tangente à la ligne de repère spéciale des efforts tranchants. L'ordonnée K′ de cette ligne est l'ordonnée moyenne du lieu des efforts tranchants; sa dérivée est l'ordonnée moyenne de la charge.

NOTE IV.

Accords de surfaces et de systèmes concentrés.

§ 1.

797. Définition. — Entre deux abscisses x_0 et X, une courbe AB (fig. 338) détermine des aires $y\,dx$ de signes différents; intégrons plusieurs fois en partant de l'abscisse x_0; il peut se faire que les intégrales $I_1, I_2, \ldots I_n$ s'annulent pour $x = X$. Nous demandons de pouvoir dire alors que ces surfaces forment un accord de degré $n+1$.

Exemples. 1° L'accord du premier degré n'existe pas ou plutôt toute surface constitue un accord de cette espèce.

2° Si la courbe limite au-dessus de l'axe des x et au-dessous deux surfaces égales, l'intégrale première est nulle; ces deux surfaces forment un accord du second degré. Les surfaces qui représentent les déblais et les remblais forment

un accord du second degré, quand il y a compensation des déblais et des remblais. Dans une poutre sur deux appuis le lieu des efforts tranchants détermine un accord du deuxième degré, parce que l'intégrale première de ce lieu est nulle; c'est en effet le moment de toutes les forces; il est égal à zéro si la poutre est en équilibre.

3° Une courbe limite trois surfaces, une de signe contraire aux deux autres; les poids de ces surfaces (supposées homogènes) se font équilibre; l'axe des x est horizontal, l'axe des y vertical. Ces trois surfaces forment un accord du troisième degré. En effet, l'intégrale première donne la somme des poids, elle doit être nulle; l'intégrale seconde donne la somme des moments, cette somme est également nulle.

Le lieu des moments fléchissants dans le cas d'une poutre prismatique encastrée à ses deux extrémités détermine un accord du troisième degré. En effet, les conditions de la déformation reviennent à exprimer que les deux intégrales η et y s'annulent à l'une des extrémités de la poutre lorsqu'on part de l'autre extrémité.

Une poutre sur deux appuis supporte une charge représentée (fig. 339) par la courbe CD; les appuis ayant certaines longueurs, il s'y développe des réactions verticales continues représentées par les lignes AB et EF. La ligne ABCDEF détermine un accord du troisième degré. En effet, les conditions d'équilibre de la poutre s'expriment en égalant à zéro les deux intégrales de cette ligne.

On peut porter les y à partir d'une ligne de repère quelconque; les conditions de l'accord sont toujours les mêmes. Nous avons rencontré un accord du troisième degré dans les poutres en arc; la ligne de repère est la fibre moyenne de l'arc, la courbe qui limite les aires est la ligne de pression. Cela se présente lorsqu'on néglige les compressions et les glissements et que l'on admet une loi particulière pour la variation des sections (789).

4° Une poutre droite prismatique encastrée à ses deux extrémités supporte une charge représentée par la courbe CD (fig. 340); les encastrements ont une certaine longueur; il se développe dans les segments *ab*, *df* de la poutre des réactions continues représentées par les lignes AB et EF; les sections *a* et *f* sont immobiles. La ligne ABCDEF détermine un accord du cinquième degré; en effet, si nous exprimons que la poutre est en équilibre, nous sommes amenés à égaler les deux premières intégrales de cette ligne à zéro; si ensuite nous exprimons les conditions de la déformation, nous égalons à zéro la troisième et la quatrième intégrale; il y a donc accord du cinquième degré.

798. Propriétés. — 1. Les moments d'ordre o à $n-1$ d'un accord de degré $n+1$ sont nuls par rapport à toutes les verticales du plan (nous entendons par verticales les parallèles à l'axe des y).

En effet, pour obtenir les moments des aires comprises entre les ordonnées fixes A*a* et B*b* (fig. 338), nous devons supposer que la ligne AB se prolonge au-delà du point B par la ligne *b*C ou $y = 0$. Mais alors on trouve pour intégrales B_1C_1, B_2C_2, ... $B_n C_n$ ou $y = 0$. Ces droites prolongées donnent les moments autour de toutes les verticales du plan; tous ces moments sont nuls. Si on appliquait la théorie générale expliquée au numéro 107, on devrait mener aux intégrales des paraboles osculatrices; on reconnaît facilement que ces paraboles osculatrices se confondent avec les droites $y = 0$.

2. Les moments d'ordre n d'un accord de degré $n+1$ sont constants autour de toutes les verticales du plan. En effet, on obtient les moments d'ordre n, à un facteur constant près, en construisant l'intégrale d'ordre $n+1$; on trouve la courbe $A_{n+1}B_{n+1}$; il faut la prolonger par l'intégrale de $B_n C_n$; on trouve l'horizontale $B_{n+1}C_{n+1}$. En la prolongeant de part et d'autre, on obtient la ligne des moments d'ordre n de toute la surface; ces moments sont constants.

3. Les moments d'ordre $n+1$ d'un accord de degré $n+1$ sont représentés par les ordonnées d'une droite.

En effet, les moments dont il s'agit sont les ordonnées de la droite $B_{n+2}\,C_{n+2}$, intégrale de l'horizontale $B_{n+1}\,C_{n+1}$. Cette droite rencontre l'axe de repère en un point P; le moment d'ordre n autour de la verticale du point P est égal à zéro; le point P peut être appelé centre de l'accord.

On démontrerait de même que les moments d'ordre $n+i$ sont représentés par une parabole de degré i.

4. La première intégrale d'un accord de degré $n+1$ forme évidemment un accord de degré n. La seconde intégrale forme un accord de degré $n-1$ et ainsi de suite. La dernière intégrale qui ne s'annule pas forme un accord du premier degré.

5. On peut exprimer que des surfaces forment un accord de degré $n+1$ en exprimant que les moments d'ordre 0 à n sont nuls par rapport à des verticales quelconques du plan.

En effet, en exprimant que le moment d'ordre zéro est nul, on exprime que la première intégrale est nulle. Il en résulte que le moment d'ordre un est constant. Si on exprime que ce moment est nul par rapport à une verticale quelconque, il est nul pour toutes les verticales; donc la seconde intégrale est nulle. Il en résulte que le moment d'ordre deux est constant. S'il est nul pour une verticale, il l'est pour toutes; la troisième intégrale est nulle. On continue de la même manière.

5. Entre deux verticales x_0 et X, on mène deux courbes qui déterminent deux accords de degré n; les moments constants de ces accords, c'est-à-dire les moments d'ordre $n-1$ sont égaux et de signes contraires; en ajoutant les ordonnées de ces deux courbes on forme un accord de degré $n+1$ c'est-à-dire de degré supérieur d'une unité à celui des accords combinés.

En effet, il est d'abord évident qu'après la superposition

des accords toutes les intégrales d'ordre 1 à n sont nulles, car chacune d'elles est la somme de deux intégrales nulles. L'intégrale d'ordre $n+1$ est aussi nulle parce que c'est la somme de deux intégrales égales et de signes contraires.

Il résulte de là que de même que l'accord du deuxième degré est un couple de surfaces, l'accord du troisième degré est un couple de deux accords du deuxième degré, l'accord du quatrième degré est un couple d'accords du troisième et ainsi de suite.

799. Nouvelle définition. — Si la fonction $f(x)$ détermine entre x_0 et X un accord de degré $n+1$, on a :

$$\int_{x_0}^{X} \theta_{n-1} f(x)\, dx = 0 \qquad (1)$$

θ_{n-1} désignant une fonction entière quelconque de x de dégré $n-1$. Réciproquement cette équation exprime que $f(x)$ forme un accord de degré $n+1$.

En effet on peut mettre la fonction θ_{n-1} sous la forme

$$\theta_{n-1} = a + b(X - x) + c(X - x)^2 + \cdots l(X - x)^{n-1}.$$

En remplaçant la fonction θ_{n-1} par sa valeur dans l'intégrale précédente, celle-ci se décompose en une somme d'intégrales moments qui sont toutes égales à zéro. Réciproquement si l'intégrale proposée est nulle pour toutes les fonctions entières de degré $n-1$, on fera successivement

$$\theta_{n-1} = 1,\ \theta_{n-1} = X - x,\ \theta_{n-1} = (X-x)^2 \cdots \theta_{n-1} = (X-x)^{n-1};$$

on obtiendra toutes les équations qui expriment qu'il y a accord de degré $n+1$.

Corollaire. — Si on multiplie la fonction $f(x)$ par une fonction entière de degré i le degré de l'accord est diminué de i. En effet, on a :

$$\int_{x_0}^{X} \theta_{n-i-1}\theta_i f(x)\, dx = 0.$$

800. Formule d'intégration. — Si $f(x)$ détermine un accord de degré $n+1$ de x_0 à X, si I_1, I_2, I_3, ... I_n désignent les intégrales successives de x_0 à x et qui s'annulent pour les valeurs x_0 et X; si enfin $F(x)$ est une fonction quelconque, on a :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)F(x)dx=(-1)^i\int_{x_0}^{X} I_iF^{(i)}(x)dx=(-1)^n\int_{x_0}^{X} I_nF^{(n)}(x).dx \quad (2)$$

En effet, intégrons par parties de manière à prendre les dérivées de $F(x)$ et les intégrales de $f(x)$; tous les premiers termes qui contiennent I_1, I_2, I_n comme facteurs s'annulent aux deux limites x_0 et X et disparaissent. On a par exemple

$$\int_{x_0}^{X} I_iF^{(i)}(x)\,dx=\left[I_{i+1}F^{(i)}(x)\right]_{x_0}^{X}-\int_{x_0}^{X} I_{i+1}F^{(i+1)}(x)\,dx,$$

ou

$$\int_{x_0}^{X} I_iF^{(i)}(x)\,dx=-\int_{x_0}^{X} I_{i+1}F^{(i+1)}(x)\,dx.$$

A chaque opération les indices augmentent d'une unité, et un signe moins s'introduit. Cela démontre le théorème.

Si on continuait l'intégration par parties, on introduirait I_{n+1}, $I_{n+2}\cdots$ qui ne s'annulent plus pour la valeur X; la formule se complique.

Si dans l'équation (2) on pose $F(x)=\theta_{n-1}$, on a $F^{(n)}(x)=0$; on retrouve l'équation (1).

801. Changements de signe. — La fonction $f(x)$ et ses intégrales présentent des changements de signe. Nous allons démontrer qu'à chaque intégration, il se perd au moins un changement de signe.

En effet, l'intégrale d'une des courbes $\psi(x)$ représente les

aires engendrées par l'ordonnée de cette courbe. Le premier changement de signe se présentera là où il y aura compensation entre les aires positives et les aires négatives. Si on continue de même, on voit que cette compensation ne peut se produire que dans les intervalles compris entre les points où $\psi(x)$ change de signe. Le nombre de changements de signe de l'intégrale est donc au plus égal au nombre de ces intervalles, c'est-à-dire qu'il est inférieur au moins d'une unité au nombre de changements de signe de $\psi(x)$.

Il peut se faire que la compensation des aires ne se produise pas dans un intervalle ; il faudra alors dépasser un second intervalle avant de trouver des aires qui diminuent la valeur absolue de l'intégrale; donc le nombre d'intervalles sans changements de signe de l'intégrale est pair.

Il résulte de là qu'à chaque nouvelle intégration on perd 1 ou un nombre impair de changements de signe.

802. Accord parfait. — Lorsque la fonction $f(x)$ présente n changements de signe entre x_0 et X, il y a $n+1$ surfaces dont les adjacentes sont de signes différents; l'accord de degré le plus élevé que l'on puisse obtenir est un accord de degré $n+1$.

En effet, à chaque intégration, il se perd au moins un changement de signe; donc I_n ne présente plus de changement de signe entre x_0 et X; donc il est impossible que I_{n+1} s'annule pour $x = X$, car les aires dont il faut prendre la somme sont de même signe.

L'accord ne peut donc pas être de degré supérieur à $n+1$. Lorsque les $n+1$ surfaces forment un accord de degré $n+1$, elles sont accordées entre elles de la manière la plus convenable. Nous dirons alors que l'accord est parfait.

Dans un accord parfait, il se perd exactement un changement de signe à chaque intégration. En effet, il y a n changements de signe à perdre; il y a n intégrations à considérer. Il s'en perd au moins un à chaque intégration, mais

il ne peut pas s'en perdre plus d'un, si non on en perdrait plus qu'il y en a. Il résulte de là que les courbes intégrales d'ordre 1, 2, 3... déterminent aussi des accords parfaits de degré n, $n-1$, $n-2$ etc.... De là résulte aussi une propriété importante, c'est que la dernière intégrale qui s'annule aux limites de l'accord ne change pas de signe entre ces limites.

803. Accords imparfaits. — Si la fonction $f(x)$ présente $n+k$ changements de signe entre x_0 et X et ne constitue qu'un accord de degré $n+1$, les $n+k+1$ surfaces ne sont pas accordées aussi bien qu'elles pourraient l'être; l'accord est imparfait. Dans un accord imparfait il est impossible de préciser le nombre de changements de signe qui peuvent se produire dans les intégrales. Différents cas peuvent se présenter. Il peut se perdre un changement de signe à chaque intégration; alors il reste k changements de signe à la dernière intégrale qui s'annule aux limites. Il peut se perdre un nombre pair d'autres changements de signe, il reste dans la dernière intégrale $k-2$, $k-4$ ou $k-2i$ changements de signe.

§ 2. — COURBES HARMONIQUES.

804. Parabole harmonique. — Etant donnée une courbe dont l'équation contient un certain nombre de paramètres arbitraires, on peut déterminer ces paramètres de manière à former entre x_0 et X un accord d'ordre le plus élevé. Nous dirons alors que c'est la courbe harmonique de l'espèce donnée.

Proposons-nous de déterminer la parabole harmonique de degré n; son équation est de la forme :

$$y = A\,(x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} \cdots + p_n).$$

Cette équation paraît contenir $n+1$ paramètres arbitraires; mais il faut remarquer que faire varier le coefficient

A c'est augmenter ou diminuer l'échelle des ordonnées; cela n'exerce aucune influence sur le degré de l'accord. Nous ne pourrons donc exprimer que n conditions, et déterminer un accord de degré $n + 1$. Remarquons aussi que la parabole ne peut présenter que n changements de signe; il en résulte, d'une autre manière, que le degré le plus élevé de l'accord est $n + 1$ et que dans ce cas l'accord sera parfait.

Au lieu de déterminer analytiquement les paramètres p, nous chercherons l'intégrale d'ordre n de la parabole en admettant qu'il y ait accord d'ordre $n + 1$. L'intégrale d'ordre n est une fonction entière de degré $2n$; elle s'annule aux deux limites x_0 et X; de plus en ces points les $n - 1$ premières dérivées s'annulent également; l'équation que l'on obtient en égalant cette fonction entière à zéro a donc n racines égales à x_0 et n racines égales à X; il n'y a pas d'autres racines; on a donc :

$$I_n(x) = N(x - x_0)^n (x - X)^n$$

On en déduit :

$$f(x) = ND^n [(x - x_0)^n (x - X)^n]. \qquad (3)$$

Le coefficient N peut être pris arbitrairement.

Il est évident que toutes les conditions de l'accord sont satisfaites, car nous avons exprimé que I_1, $I_2 \ldots I_n$ s'annulent aux deux limites. Il en résulte immédiatement que l'équation que l'on obtient en égalant la fonction (3) à zéro a n racines inégales comprises entre x_0 et X, car il doit y avoir n changements de signe. La fonction I_1 présente $n - 1$ changements de signe qui s'intercalent entre ceux de $f(x)$; il y a en outre les racines x_0 et X; il n'y a pas d'autres racines. La fonction I_2 présente $n - 2$ changements de signe qui s'intercalent entre ceux de I_n; il y a en outre deux racines x_0 et deux racines X. On continue de même. La fonction I_i présente $n - i$ changements de signe qui

s'intercalent entre ceux I_{i-1}; il y a en outre i racines x_0 et i racines X; il n'y a pas d'autres racines; les racines comprises entre x_0 et X exclusivement sont des racines inégales.

Prenons l'origine au milieu de l'intervalle $X - x_0$; prenons la moitié de cet intervalle comme unité; nous aurons $X = 1$ $x_0 = -1$; l'équation (3) devient

$$f(x) = ND^n (x^2 - 1)^n. \qquad (4)$$

Les polynômes que l'on obtient en donnant à n différentes valeurs se rencontrent dans un grand nombre de questions d'analyse. On les appelle les polynômes de Legendre.

Théorème. — Si on fait passer une parabole de degré $n + i$ par les points où la parabole harmonique de degré n coupe l'axe des x, on obtient un accord de degré $n + 1 - i$.

En effet l'équation de cette parabole de degré $n + i$ est de la forme

$$y = \theta_i f(x)$$

si $f(x)$ est l'ordonnée de la parabole harmonique et θ_i une fonction entière de degré i. Or quand on multiplie une fonction par une fonction entière de degré i le degré de l'accord diminue de i (799, corollaire). Cela démontre le théorème.

Si en particulier on prenait $i = n - 1$, ou $n + i = 2n - 1$, l'accord se réduirait au deuxième degré; il y aurait simple compensation des aires.

Application. — Une poutre prismatique encastrée à ses extrémités supporte une charge uniforme. Le lieu des moments fléchissants est une parabole du second degré; elle forme un accord du troisième degré; donc c'est la parabole harmonique.

L'équation de l'élastique est de la forme :

$$y = N (x^2 - 1)^2.$$

Le moment fléchissant s'exprime par :

$$M = ND^2 (x^2 - 1)^2 = N (12x^2 - 4).$$

Nous avons dû prendre comme unité la demi-longueur de la poutre; en rétablissant l'unité arbitraire, on a :

$$M = N\left[12\left(\frac{2x}{l}\right)^2 - 4\right] = N'\left(x^2 - \frac{l^2}{2}\right).$$

Si p est la charge, le terme en x^2 est $\frac{px^2}{2}$; on a donc :

$$M = \frac{p}{2}\left(x^2 - \frac{l^2}{2}\right).$$

Les points d'inflexion s'obtiennent en posant $M = 0$; on a

$$x = \pm\frac{l}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§ 3. — Facteurs harmoniques.

805. — On donne une fonction quelconque $F(x)$; on demande de déterminer un facteur $f(x)$ qui contient des paramètres arbitraires de telle façon que la courbe $y = f(x)\,F(x)$ détermine entre x_0 et X l'accord de degré le plus élevé. La fonction $f(x)$ est alors le facteur harmonique de l'espèce donnée.

Supposons que la fonction donnée $F(x)$ soit entière et de degré m, que la fonction $f(x)$ soit entière et de degré n. Nous pourrons comme précédemment déterminer les paramètres de la fonction $f(x)$ de manière à réaliser un accord de degré $n + 1$. La courbe intégrale d'ordre n de la fonction $y = f(x)\,F(x)$ a encore n racines x_0 et n racines X; donc on peut écrire :

$$I_n = (x - x_0)^n\,(x - X)^n\,\psi(x).$$

On a donc

$$f(x)\,F(x) = D^n\,[(x - x_0)^n\,(x - X)^n\,\psi(x)]. \qquad (5)$$

La fonction y est de degré $m + n$, I_n est de degré $m + 2n$, $\psi(x)$ est une fonction inconnue de degré m. On la déterminera par la condition que le second membre de l'équation (5) soit divisible exactement par $F(x)$ et on aura :

$$f(x) = \frac{D^n [(x - x_0)^n (x - X)^n \psi(x)]}{F(x)}. \qquad (6)$$

Remarquons que la fonction y doit présenter au moins n changements de signe entre x_0 et X ; si la fonction donnée $F(x)$ ne change pas de signe, la fonction $f(x)$ doit présenter n changements de signe; donc l'équation $f(x) = 0$ a n racines inégales entre x_0 et X. L'accord est alors parfait et les racines des intégrales de y comprises entre x_0 et X se disposent comme dans le cas de la parabole harmonique :

Prenons comme application

$$F(x) = (x + 1)^\alpha (x - 1)^\beta.$$

On demande le facteur harmonique de degré n pour $x_0 = -1$, $X = +1$. Soit τ_n ce facteur; la courbe

$$y = (x + 1)^\alpha (x - 1)^\beta \tau_n$$

doit former un accord de degré $n + 1$. L'équation $y = 0$ a déjà α racines $x = -1$ et β racines $x = +1$. A chaque intégration on ajoute une racine $x = -1$ et une racine $x = +1$; donc $I_n = 0$ a $n + \alpha$ racines $x = -1$, et $n + \beta$ racines $x = +1$. Comme I_n est de degré $2n + \alpha + \beta$, il n'y a pas d'autres racines, on a donc

$$I_n = N (x + 1)^{n+\alpha} (x - 1)^{n+\beta}.$$

On en déduit

$$(x + 1)^\alpha (x - 1)^\beta \tau_n = N D^n [(x + 1)^{n+\alpha} (x - 1)^{n+\beta}].$$

D'où :

$$\tau_n = \frac{\mathrm{ND}^n\left[(x+1)^{n+\alpha}(x-1)^{n+\beta}\right]}{(x+1)^{\alpha}(x-1)^{\beta}}.$$

Les polynômes τ_n possèdent des propriétés analogues à celles des polynômes de Legendre (1).

§ IV. — Accords de systèmes concentrés.

806. Systèmes concentrés. — Nous avons précédemment (797) cité comme exemple d'accord la courbe des charges qui sollicitent une poutre sur deux appuis (fig. 339) et une poutre encastrée (fig. 340); la charge pourrait comprendre des forces isolées, des couples isolés; en appliquant le théorème des charges dérivées, nous avons été conduits à examiner des $\Delta\eta$ et des Δy concentrés. Nous allons exposer d'une manière générale les systèmes d'aires concentrées que l'on peut imaginer sur des verticales; nous étudierons les discontinuités qu'elles engendrent dans les intégrales et les accords que l'on peut former entre des aires continues et concentrées.

Traçons d'abord entre les verticales $x = 0$ et $x = 1$, une courbe qui détermine une aire J_1; au-delà de l'abscisse 1, l'intégrale première est une constante J_1. Réduisons les dimensions horizontales de l'aire J_1 dans le rapport $1 : \varepsilon$ de manière à introduire cette aire entre les abscisses a et $a + \varepsilon$; mais en même temps augmentons les dimensions verticales dans le rapport inverse ε à 1; l'aire aura toujours la même valeur J_1. Supposons que la quantité ε décroisse indéfiniment, nous aurons introduit à la limite une aire J_1 concentrée sur la verticale $x = a$. Supposons que l'on donne une

(1) Voyez Possé, *sur quelques applications des fractions continues*. St-Pétersbourg, 1886.

courbe continue $y = f(x)$, et qu'on ajoute à y les ordonnées de l'aire que nous avons introduite entre a et $a + \varepsilon$; au-delà de l'abscisse $a + \varepsilon$ l'intégrale I_1 sera augmentée d'une constante J_1; en passant à la limite, cette augmentation se produit brusquement sur la verticale $x = a$. L'intégrale I_2 présentera un point angulaire, mais néanmoins variera continûment. En effet, reprenons l'aire finie comprise entre l'abscisse 0 et 1; soit J_2 l'intégrale seconde au point 1; après les réductions d'échelles on trouvera au point $a + \varepsilon$ une intégrale seconde

$$\frac{J_2 \times \varepsilon^2}{\varepsilon} = J_2 \varepsilon.$$

Cette quantité a pour limite zéro. Il en est de même des intégrales d'ordre supérieur.

Nous pouvons en raisonnant de la même manière introduire un accord concentré de degré quelconque $i + 1$. Construisons d'abord un accord de cette espèce de l'abscisse 0 à l'abscisse 1. Toutes les intégrales J_1, J_2, ... J_i sont nulles pour $x = 1$ et au-delà, tandis que l'intégrale J_{i+1} est constante. Réduisons les dimensions horizontales dans le rapport $1 : \varepsilon$ de manière à introduire l'accord entre les verticales a et $a + \varepsilon$; en même temps augmentons les dimensions verticales dans le rapport ε^{i+1} à 1. L'intégrale J_{i+1} conservera sa valeur. Supposons que la quantité ε converge vers zéro, à la limite nous aurons introduit un accord de degré $i + 1$ concentré sur la verticale $x = a$ et l'intégrale constante d'ordre $i + 1$ est toujours J_{i+1}. Ajoutons les ordonnées de l'accord compris entre les verticales a et $a + \varepsilon$ aux ordonnées de la courbe donnée et voyons quelles sont les modifications que les différentes intégrales subiront. En dehors des verticales a et $a + \varepsilon$, les intégrales I_1, I_2 ... I_i ne sont pas modifiées; entre ces limites les courbes intégrales subissent, il est vrai, des évolutions vers l'infini positif et

négatif; mais toutes ces évolutions finissent par se concentrer sur une même verticale; on peut dire que les intégrales I_1 I_2, I_i ne sont pas modifiées. L'intégrale I_{i+1} au contraire, est augmentée au-delà de la verticale $a + \varepsilon$ d'une constante J_{i+1}; à la limite, cette augmentation se produit brusquement sur la verticale a. L'intégrale I_{i+2} ne présente pas de discontinuité; en effet, reprenons l'accord construit de 0 à 1; soit J_{i+2} l'intégrale d'ordre $i + 2$ au point 1; après la réduction des échelles on trouve :

$$J_{i+2}\frac{\varepsilon^{i+2}}{\varepsilon^{i+1}} = \varepsilon J_{i+2}.$$

Cet accroissement de I_{i+2} a pour limite zéro et il en est de même des intégrales d'ordre supérieur. En résumé, l'influence d'un accord concentré d'ordre $i + 1$ est de produire une augmentation brusque de l'intégrale d'ordre $i + 1$.

Nous pouvons ainsi introduire un système d'aires non accordées et concentrées sur une même verticale. Construisons d'abord entre les verticales 0 et 1 : 1° une courbe z déterminant une aire J_1, 2° une courbe u déterminant un accord du second degré caractérisé par son intégrale constante J_2, 3° une courbe v déterminant un accord du troisième degré caractérisé par sa troisième intégrale constante J_3 et ainsi de suite. Introduisons ces courbes entre les verticales a et $a + \varepsilon$ en leur faisant subir les réductions d'échelles que nous avons expliquées précédemment. Ajoutons toutes les ordonnées en γ comprenant l'ordonnée $f(x)$ de la courbe donnée; nous trouverons :

$$y = f(x) + \frac{z}{\varepsilon} + \frac{u}{\varepsilon^2} + \cdots \frac{w}{\varepsilon^{i+1}}.$$

En passant à la limite nous introduirons dans les intégrales les discontinuités J_1, J_2, ... J_{i+1}. Remarquons si ε est suffisamment petit, c'est w qui donne son signe à la valeur de y;

nous supposerons que l'accord w est parfait; il y aura donc i changements de signe. Par conséquent il y a entre les verticales a et $a + \varepsilon$ un système de $i + 1$ surfaces dont les signes sont alternés. A chaque intégration le degré de l'accord w diminue, il y a un changement de signe qui disparaît. Outre les changements de signe qui se produisent entre a et $a + \varepsilon$, il peut y avoir aussi des changements de signe sur les verticales a et $a + \varepsilon$ si w_0 et $f(a)$ et w_1 et $f(a)$ sont de signes différents. Toutes les règles que nous avons exposées sur les changements de signe sont évidemment applicables avant de passer à la limite; elles sont encore applicables à la limite si l'on tient compte des changements de signe cachés sur les verticales où les aires sont concentrées.

807. Accord parfait de forces ou de surfaces concentrées. — On concentre n surfaces sur des verticales données $x_1, x_2 \dots x_n$; on demande de déterminer ces surfaces de manière à former un accord parfait. On peut supposer que les surfaces soient pesantes, les surfaces concentrées deviennent des forces; le problème proposé est la généralisation du problème de l'équilibre des forces parallèles.

S'il n'y avait que trois forces, il ne pourrait y avoir que deux changements de signe; l'accord serait du second degré. Il faut pour cela que les deux premières intégrales s'annulent; la première est la somme des forces, la seconde est le moment statique; ces intégrales s'annulent lorsque les trois forces se font équilibre. Dans le cas de n forces il peut y avoir $n - 1$ changements de signe; l'accord sera parfait si les n premières intégrales s'annulent; non seulement les forces se font équilibre, mais le moment d'inertie et les moments d'ordre égal ou plus petit que $n - 1$ s'annulent; le moment d'ordre n est constant, le moment d'ordre $n + 1$ a un centre.

Soient $P_1, P_2 \dots P_n$ les forces inconnues; pour une force les intégrales successives sont :

$$P_1 \quad P_1(X - x_1) \quad P_1(X - x_1)^{\cdot 2} \cdots \quad P_1(X - x_1)^{\cdot n-2}.$$

Les équations de condition sont donc de la forme :

$$\Sigma P_i (X - x_i)^k = 0$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots n - 2$. Ces équations ne déterminent que les rapports des forces; nous déterminerons leurs grandeurs en nous donnant l'intégrale constante I_n ; posons

$$\Sigma P_i (X - x_i)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Nous avons vu que l'on pouvait prendre les moments par rapport à toutes les verticales; prenons $X = 0$ et supprimons les facteurs communs, on trouve :

$$\begin{aligned}
&P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 0\\
&P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdots + P_n x_n = 0\\
&P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + P_3 x_3^2 + \cdots + P_n x_n^2 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_1 x_1^{n-2} + P_2 x_2^{n-2} + P_3 x_3^{n-2} + \cdots + P_n x_n^{n-2} = 0\\
&P_1 x_1^{n-1} + P_2 x_2^{n-1} + P_3 x_3^{n-1} + \cdots + P_n x_n^{n-1} = 1.
\end{aligned}$$

On peut résoudre ces équations par les déterminants; tous les déterminants contiennent comme facteurs communs les différences d'abscisse élevées à certaines puissances; des simplifications considérables se produisent. Nous nous contenterons d'écrire les résultats parce que nous les vérifierons d'une autre manière. Posons :

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

On trouve

$$P_i = \frac{1}{f'(x_i)}. \qquad (7)$$

Si comme au numéro 799 nous mettons les équations de l'accord sous forme d'une équation unique, nous trouvons :

$$\Sigma \frac{\theta_{n-2}(x_i)}{f'(x_i)} = 0. \qquad (8)$$

On retrouve ainsi un théorème d'algèbre. Réciproquement si on démontre l'équation (8), on en déduira la formule (7). C'est cette voie que nous allons suivre; elle nous permettra de déterminer en même temps l'intégrale constante et le centre de l'accord.

Reprenons la formule de décomposition d'une fraction rationnelle (758)

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \sum_1^n \frac{F(x_i)}{f'(x_i)} \frac{1}{x - x_i}.$$

Multiplions par x et désignons par E la partie entière; il vient :

$$E \frac{x F(x)}{f(x)} = x Q(x) + \sum_1^n \frac{F(x_i)}{f'(x_i)},$$

car la partie entière de $(x : x - x_i)$ est 1. Faisons $x = 0$ et appelons E_0 la valeur de la partie entière dans cette hypothèse; on a :

$$\sum_1^n \frac{F(x_i)}{f'(x_i)} = E_0 \frac{x F(x)}{f(x)}.$$

Si on prend pour $F(x)$ une fonction θ_{n-2} de degré $n - 2$, la partie entière qui forme le second membre de cette équation n'existe pas; on a donc :

$$\sum_1^n \frac{\theta_{n+1}(x_i)}{f'(x_i)} = 0.$$

Il est donc démontré que les forces représentées par les inverses des dérivées $f'(x_i)$ forment un accord de degré n.

Faisons

$$F(x) = x^{n+\mu-1};$$

on trouve

$$\sum_1^n \frac{x_i^{n+\mu-1}}{f'(x_i)} = E_0 \frac{x^{n+\mu}}{f(x)}.$$

En divisant $x^{n+\mu}$ par $f(x)$ on trouve pour partie entière

$$E = x^{\mu} + q_1 x^{\mu-1} + q_2 x^{\mu-2} \cdots + q_{\mu},$$

soit

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} \cdots + p^n.$$

Les coefficients q_1, q_2, q_3, ... sont donnés par les équations suivantes que l'on obtient en exprimant que le produit $Ef(x)$ est égal à $x^{n+\mu}$ moins le reste de degré $n-1$; on a

$$\begin{gathered} q_1 + p_1 = 0 \\ q_2 + q_1 p_1 + p_2 = 0 \\ q_3 + q_2 p_1 + q_1 p_2 + p_3 = 0, \text{ etc.} \end{gathered}$$

On a alors :

$$\sum_1^n \frac{x_i^{n+\mu-1}}{f'(x_i)} = q_{\mu}.$$

Cette formule nous permettra de trouver l'intégrale constante I_n; on a :

$$I_n = \Sigma \frac{(X - x_i)^{n-1}}{f'(x_i)}.$$

Puisque cette intégrale est constante, faisons $X = 0$; il vient :

$$I_n = (-1)^{n-1} \Sigma \frac{x_i^{n-1}}{f'(x_i)} = (-1)^{n-1} q_0 = (-1)^{n-1}.$$

L'intégrale I_{n+1} a pour valeur

$$I_{n+1} = \Sigma \frac{(X - x_i)^n}{f'(x_i)}.$$

En faisant $X = 0$, on trouve :

$$_{n+1}(0) = (-1)^n q_1 = (-1)^n (-p_1).$$

Soit c l'abscisse du centre de l'accord; on a aussi

$$I_{n+1} = I_n (X - c).$$

Faisons $X = 0$, nous trouvons :

$$c = -\frac{I_{n+1}(0)}{I_n} = -\frac{p_1}{n}.$$

Or on a $p_1 = \Sigma x_i$, on a donc

$$c = \frac{\Sigma x_i}{n}.$$

Il résulte de là que le centre de l'accord est le centre des moyennes distances des points d'application des forces.

On peut aussi trouver l'équation d'une courbe intégrale quelconque prise au-delà des forces et prolongée au besoin de part et d'autre. On a :

$$I_{n+\mu} = \Sigma \frac{(X - x_i)^{n+\mu-1}}{f'(x_i)}.$$

Développons le numérateur par la formule du binôme qui devient en acceptant nos notations

$$(X - x_i)^{n+\mu-1} = \Sigma X^{\cdot k} (-x_i)^{n+\mu-1-k};$$

remplaçons les sommes par leurs valeurs

$$\Sigma \frac{(-x_i)^{n+\mu-1-k}}{f'(x_i)} = (-1)^{n+\mu-1-k} q_{\mu-k},$$

on trouve :

$$I_{n+\mu} = (-1)^{n+\mu-1} q_\mu + (-1)^{n+\mu-2} X q_{\mu-1} + (-1)^{n+\mu-3} X^{\cdot 2} q_{\mu-2} + \cdots$$

On retrouve :

$$I_n = (-1)^{n-1}$$

et

$$I_{n+1} = (-1)^{n-1} X + (-1)^n q_1 = (-1)^{n-1} \left(X - \frac{q_1}{n} \right).$$

Le centre de l'accord est :

$$X = \frac{q_1}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n},$$

valeur déja trouvée.

808. Accord parfait de systèmes concentrés. — On concentre sur la verticale x_1 un système de α surfaces non accordées; ce système est caractérisé par un accroissement brusque de l'intégrale première égal à P_1, un accroissement brusque de l'intégrale seconde égal à M_1, un accroissement brusque de l'intégrale troisième égal à N_1, et ainsi de suite jusqu'à T_1 qui est l'accroissement brusque de l'intégrale d'ordre α. On concentre de même sur les verticales x_2, x_3, x_k, des systèmes de β, γ ... et λ surfaces caractérisés par les accroissements brusques d'intégrales représentés par P_2, P_3 ..., M_2, M_3 ... etc. On demande de déterminer toutes les quantités P, M, N ... T de manière à réaliser un accord parfait.

Le nombre de surfaces est

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n.$$

L'accord parfait sera de degré n; il faut exprimer que les $n - 1$ premières intégrales s'annulent.

Pour un système concentré quelconque, les intégrales successives sont données par les formules :

$$I_1 = P_1$$
$$I_2 = P_1 (X - x_1) + M_1$$
$$I_3 = P_1 (X - x_1)^2 + M_1 (X - x_1) + N_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_{n-1} = P_1 (X - x_1)^{n-2} + M_1 (X - x_1)^{n-3} \cdots + T_1 (X - x_1)^{n-2}.$$

Les équations sont donc

$$\Sigma P_1 = 0$$
$$\Sigma [P_1 (X - x_1) + M_1] = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma [P_1 (X - x_1)^{n-2} + M_1 (X - x_1)^{n-3} \cdots + T_1 (X - x_1)^{n-\alpha-2}] = 0.$$

Au lieu de résoudre ces équations, nous suivrons une voie analogue à celle qui nous a conduit au but dans le cas d'un accord de forces. Remarquons qu'introduire α surfaces

concentrées sur la verticale x_1, c'est introduire α forces dont les points d'application coïncident à la limite. Nous sommes amenés ainsi à considérer le cas qui nous occupe comme le cas particulier d'un accord de n forces; c'est le cas où il y a α points d'application qui convergent l'un vers l'autre, et où d'autres groupes de $\beta, \gamma, \ldots \lambda$ points subissent une évolution de même genre. Ces considérations nous amènent à poser

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_k)^\lambda$$

et nous donnent l'espoir de trouver les quantités qui satisfont aux conditions du problème en cherchant comme précédemment

$$E_0 \frac{xF(x)}{f(x)}.$$

En appliquant la formule (4) du numéro 759, on trouve en effet

$$E_0 \frac{xF(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{\psi^{(\alpha-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}$$

formule où l'on pose :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)^\alpha}$$

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{\varphi(x)}.$$

Si par exemple, nous prenons

$$F(x) = (X - x)^{n-2}.$$

La partie entière E_0 n'existe pas et l'on a

$$\Sigma \frac{\psi^{(\alpha-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots\alpha-1} = 0. \qquad (9)$$

Mais alors on a

$$\psi(x) = \frac{(X - x)^{n-2}}{\varphi(x)} = (X - x)^{n-2} v.$$

En appliquant la règle de Leibnitz pour la dérivation d'un produit, on trouve :

$$\frac{\psi^{(\alpha-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(\alpha-1)} = (X-x)^{\cdot n-2} v_1 1^{\cdot \alpha-1} + (X-x)^{\cdot n-3} v_1' (-1) 1^{\cdot \alpha-2} + (X-x)^{\cdot n-4} v_1'' (-1)^{\cdot 2} 1^{\cdot \alpha-3} + \cdots$$

Prenons :

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= v_1 1^{\cdot \alpha-1} \\ M_1 &= v_1' (-1) 1^{\cdot \alpha-2} \\ N_1 &= v_1'' (-1)^{\cdot 2} 1^{\cdot \alpha-3} \text{ etc...} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

L'équation (9) devient :

$$\Sigma [P_1 (X-x_1)^{\cdot n-2} + M_1 (X-x_1)^{\cdot n-3} + \cdots] = 0.$$

Comme nous aurions pu prendre $F(x) = (X-x)^{\cdot i}$ pour $i = 0, 1, 2 \ldots n-2$, nous avons démontré que les quantités fournies par les équations (10) et leurs analogues pour x_2, x_3, ... x_k satisfont à toutes les conditions de l'accord. En résumé on obtient les éléments de l'accord en prenant les dérivées des quantités analogues à v, ou

$$\frac{(x-x_1)^\alpha}{f(x)} \quad \frac{(x-x_2)^\beta}{f(x)} \quad \frac{(x-x_k)^\lambda}{f(x)}$$

en y faisant $x = x_1$, x_2.. ou x_k, et en multipliant ces dérivées par les coefficients numériques indiqués par les formules (10).

On trouverait les intégrales successives de l'accord en posant

$$F(x) = (X-x)^{\cdot n+\mu-1}.$$

On trouve encore :

$$I_n = (-1)^{\cdot n-1}$$

$$I_{n+1} = (-1)^{\cdot n-1} \left(X - \frac{\Sigma \alpha x_1}{n}\right).$$

Le centre de l'accord est encore le centre des moyennes

distances des points d'application ; mais il faut supposer qu'il y a α points en x_1, β points en x_2 et ainsi de suite.

809. Résultantes de divers ordres. — Nous avons dit plus haut que la théorie des accords était la généralisation du problème de l'équilibre des forces parallèles. On peut aussi généraliser la notion de la résultante. La résultante statique ou du premier ordre réalise la même intégrale première et la même intégrale seconde. On peut déterminer un système concentré qui réalise les mêmes intégrales d'ordre 1 à i; on aura un système résultant d'ordre $i - 1$. Si on prend le système résultant en sens contraire, c'est-à-dire si on change le signe de tous ses éléments et si on l'ajoute au système proposé, on forme un accord d'ordre $i + 1$; la réciproque est vraie. Il est donc facile de résoudre les problèmes nombreux que l'on peut proposer au sujet des résultantes d'ordre supérieur. Nous laisserons ce soin au lecteur parce que nous serions entrainés très-loin si nous voulions épuiser ce sujet.

Bornons-nous à citer une petite application. Dans le cas d'une poutre sur deux appuis, on peut remplacer les charges par leur résultante statique; les réactions des appuis ne sont pas modifiées. S'il sagit d'une poutre prismatique à plusieurs travées, cette composition n'est plus permise car les réactions des appuis dépendent des intégrales troisième et quatrième. Mais pour chaque travée, on peut remplacer les charges par un système résultant du troisième ordre. La méthode des transformées droites que nous avons préconisée dans notre mémoire, revient à une composition de ce genre; on peut dire que pour chaque travée on remplace les charges par deux systèmes concentrés aux extrémités ; chacun de ces systèmes est de deux aires ; l'ensemble est un système résultant du troisième ordre.

810 Accords dérivés. — Considérons l'une des verticales de concentration comme mobile ; soit dx_1 le déplace-

ment de la verticale x_1. Nous obtenons un nouvel accord dont l'intégrale constante est toujours $I_n = (-1)^{n-1}$; en prenant la différence, nous trouverons un accord pour lequel $I_n = 0$, donc un accord de degré $n+1$. On aura aussi pour cet accord différentiel

$$dI_{n+1} = (-1)^{n-1}\, d\left(X - \frac{\alpha x_1 + \cdots}{n}\right) = (-1)^n\, \alpha dx_1.$$

Au lieu de prendre la différentielle des éléments de l'accord, prenons la dérivée divisée par α, nous aurons alors un accord dérivé pour lequel on aura

$$I'_{n+1} = (-1)^n.$$

Supposons d'abord dans la verticale x_1, une seule aire concentrée et formant avec les autres un accord de degré $n - \delta + 1$; nous retrouverons l'accord de degré n par les opérations

$$\frac{D^{\alpha-1}}{1.2.3\ldots\alpha-1} \quad \text{ou symboliquement} \quad D^{-\alpha+1}.$$

La force concentrée en x_1 a pour valeur

$$v_1 = \frac{1}{\varphi(x_1)}, \quad \varphi(x) = (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_k)^\lambda.$$

L'intégrale d'un certain ordre est pour cette force

$$v_1 (X - x_1)^{-\mu}.$$

Après toutes les opérations, on trouvera :

$$D^{-\alpha-1}[v_1(X-x_1)^{-\mu}] = v_1 1^{-\alpha-1}(X-x_1)^{-\mu} + v'_1 1^{-\alpha-2}(X-x_1)^{-\mu-1} + \cdots$$

On retrouve très-élégamment les formules (10) du numéro 807.

On pourrait se proposer de concentrer sur la verticale x_1 $p + \alpha$ surfaces, formant un accord de degré p; cet accord est caractérisé par α discontinuités dans les intégrales I_p,

$I_{p+1} \dots I_{p+\alpha-1}$; mais il n'y a pas des discontinuités dans les intégrales d'ordre inférieur. On effectuera alors les opérations indiquées par le symbole.

$$[D^{\cdot\alpha-1} + AD^{\cdot\alpha} + BD^{\cdot\alpha+1} \dots + LD^{\cdot\alpha+p-1}] [v_1 (X - x_1)^{\cdot\mu}].$$

On déterminera les coefficients A, B, ... L de manière à éliminer les puissances supérieures de $X - x_1$, et on obtiendra les éléments de l'accord demandé.

Remarquons que les dérivations des éléments de l'accord sont très simples quand il sagit des verticales immobiles; P, M, N, deviennent $D^{\cdot\alpha-1}P$, $D^{\cdot\alpha-1}M$, $D^{\cdot\alpha-1}N$,...

Le centre de ces accords dérivés et combinés entre eux est déterminé par des formules assez compliquées.

NOTE V.

Calcul d'une intégrale d'ordre *n* par une quadrature.

§ 1. — Problème a résoudre.

811. L'intégrale d'ordre n d'une fonction dépend de n constantes. On les détermine en assujettissant l'intégrale à n conditions. On donne certaines valeurs de l'intégrale et de ses dérivées, ou même des valeurs des intégrales d'ordre supérieur. Si la fonction $F(x)$ qu'il sagit d'intégrer était constamment nulle, l'intégrale d'ordre n serait une fonction entière de degré $n - 1$. Cette fonction entière $\psi(x)$ peut être déterminée soit par une formule, soit par un tracé (Note I). Posons alors

$$y = \psi(x) + R \qquad (1)$$

y étant l'intégrale cherchée. Si on prend la dérivée d'ordre n de cette équation on trouve que R est aussi une intégrale d'ordre n de la même fonction $F(x)$. Il est facile de voir que cette intégrale R satisfait à n conditions que l'on obtient en annulant les quantités données pour la fonction y.

Supposons pour fixer les idées que l'on donne pour $x = x_1$

$$\frac{d^3y}{dx_1^3} = A.$$

On a déjà $\psi'''(x_1) = A$; donc en prenant la dérivée troisième de l'équation (1), on trouve :

$$A = A + \frac{d^3R}{dx_1^3} \quad \text{d'où} \quad \frac{d^3R}{dx_1^3} = 0.$$

Nous sommes ramenés à déterminer l'intégrale R, de telle façon que n valeurs de cette intégrale et de ses dérivées s'annulent. Nous allons montrer que l'on peut obtenir une valeur quelconque de R par une formule de la forme

$$R(x) = \int_{x_0}^{X} \varphi . F z dz,$$

φ étant une fonction de z représentée par une suite d'arcs paraboliques qui dépendent de la variable x.

Les applications de ce problème sont très-nombreuses. Il permet d'évaluer au planimètre la partie difficile d'une intégrale d'ordre n et notamment les erreurs commises dans les différentes méthodes d'interpolation et de quadratures approchées. Il permet aussi de discuter analytiquement les limites de ces erreurs, limites que l'on n'a trouvées jusqu'ici que dans les cas les plus faciles.

§ II. — Solution par une intégrale définie multiple.

Ce paragraphe est indépendant de la théorie que nous nous proposons d'exposer. On ne peut pas, en effet, évaluer une intégrale définie multiple par le planimètre. Mais comme on a résolu de cette façon certains problèmes dont nous donnerons plus loin une autre solution, il nous a paru utile de résumer cette méthode.

812. Formule de M. Hermite. — M. Hermite a exprimé par une formule admirable l'intégrale d'ordre n

satisfaisant à certaines conditions (1). Soit à chercher l'intégrale d'ordre n d'une fonction $F(x)$. Cette intégrale y doit satisfaire aux conditions suivantes : pour $x = x_1$ on donne y et $\alpha - 1$ dérivées, pour $x = x_2$, on donne y et $\beta - 1$ dérivées et ainsi de suite, pour $x = x_k$ on donne y et $\lambda - 1$ dérivées.

La formule de M. Hermite, sauf quelques changements de notation apportés en vue de la démonstration qui va suivre, est la suivante :

$$y = \psi(x) + f(x) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} \theta F(u) dt_k, \qquad (1)$$

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_k)^\lambda,$$

$$\theta = (1 - t_1)^{\alpha-1} (t_1 - t_2)^{\beta-1} \cdots (t_{k-1} - t_k)^{\lambda-1},$$

$$u = (x - x_k) t_k + (x_k - x_{k-1}) t_{k-1} + \cdots + (x_2 - x_1) t_1 + x_1,$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = n.$$

Cette formule se démontre par une série d'intégrations par parties. On trouvera cette démonstration dans l'ouvrage déja cité de M. Possé : *Sur quelques applications des fractions continues.*

813. Autre démonstration et généralisation. — Au lieu de nous borner à vérifier cette formule, nous allons essayer de montrer par quel mécanisme on peut y arriver d'une manière naturelle, en partant de l'énoncé du problème. Soit $\Omega(x)$ l'intégrale générale d'ordre n, T le terme des constantes quelles que soient les modifications apportées dans la forme et la valeur de ce terme. Nous devons chercher à ce que $\Omega(x) - T$ satisfasse à toutes les conditions de l'intégrale R dont il a été question au numéro 811.

Nous satisferons à α de ces conditions en prenant

$$\Omega(x) - T = \int_{x_1}^{x} (x - u_1)^{\alpha-1} \Omega^{(\alpha)}(u_1) du_1.$$

(1) Voir le tome 84 du *Journal de Borchardt.*

Le second membre est une intégrale moment qui s'annule ainsi que $\alpha - 1$ dérivées pour $x = x_1$. Posons comme à la fin du numéro 792

$$u_1 = t_1 (x - x_1) + x_1.$$

Il vient :

$$\Omega (x) - T = (x - x_1)^\alpha \int_0^1 (1 - t_1)^{\alpha - 1} \Omega^{(\alpha)} (u_1)\, dt_1.$$

Considérons $\Omega^{(\alpha)}(u_1)$ comme une intégrale de $\Omega^{(\alpha+\beta)}(u_1)$ et écrivons en appliquant la formule de Taylor complétée par l'intégrale moment

$$\Omega^{(\alpha)}(u_1) = \int_{u_1'}^{u_1} (u_1 - u_2)^{\beta - 1} \Omega^{(\alpha+\beta)}(u_2)\, du_2 + \Omega^{(\alpha)} u_1' + (u_1 - u_1')\Omega^{(\alpha+1)}(u_1') + \cdots$$

La quantité u_1' est arbitraire; si elle est indépendante de x, il est facile de voir que les termes du développement que nous avons écrits à la suite de l'intégrale forment une fonction entière de x et donneront lieu, lorsqu'on les transportera dans la valeur de $\Omega (x)$, à une fonction entière de x qui s'échappera dans les termes des constantes. Pour satisfaire aux β conditions relatives à la valeur x_2, il suffit de choisir u_1' de manière que $u_1 - u_1'$ contienne $x - x_2$ comme facteur. On y arrive en posant $u_1' = u_1 (x_2)$ ou

$$u_1' = t_1 (x_2 - x_1) + x_1.$$

Effectuons alors le changement de variable

$$u_2 = u_1' + t_2 (x - x_2).$$

Il vient :

$$\Omega^{(\alpha)}(u_1) = (x - x_2)^\beta \int_0^{t_1} (t_1 - t_2)^{\beta - 1} \Omega^{(\alpha+\beta)}(u_2)\, dt_2 + T'.$$

En reportant cette valeur dans l'expression de $\Omega (x)$, il vient :

$$\Omega (x) - T = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} (1 - t_1)^{\alpha - 1} (t_1 - t_2)^{\beta - 1} \Omega^{(\alpha+\beta)}(u_2)\, dt_2.$$

En continuant les transformations de ce genre on arrive à la formule de M. Hermite. Remarquons que tout le mécanisme de la transformation repose sur le choix des limites inférieures u_1' u_2' ... ; c'est ainsi que l'on introduit à volonté dans l'intégrale, des facteurs $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$ etc... On peut opérer de plusieurs manières ; nous avons introduit en une fois tous les facteurs $x - x_1$, tous les facteurs $x - x_2$ etc.. ; on peut introduire quelques facteurs de chaque espèce puis compléter leur nombre ; on pourrait mettre l'intégrale définie sous un grand nombre de formes. Nous pouvons en suivant la même voie résoudre un problème plus général : Chercher l'intégrale d'ordre n satisfaisant à n conditions, les unes de même espèce que celles qui viennent d'être examinées, les autres de l'espèce suivante : on donne pour une valeur x_i de la variable, des dérivées d'un certain ordre sans donner la valeur de l'intégrale elle-même. On ramène toujours la question au cas où les dérivées données sont nulles. Soit pour fixer les idées :

$$\Omega^{(p)}(x_i) = 0, \quad \Omega^{(p+1)}(x_i) = 0, \quad \Omega^{(p+2)}(x_i) = 0.$$

On commencera par exprimer $\Omega(x)$ en considérant cette fonction comme une intégrale de $\Omega^{(p)}(x)$ et en introduisant p des conditions données. On trouvera une intégrale contenant $\Omega^{(p)}(u_r)$. On aura alors

$$\Omega^{(p)}(u^r) = \int_{x_i}^{u_r} (u_r - u_{r+1})^{\cdot 2}\, \Omega^{(p+3)}(u_{r+1})\, du_{r+1}.$$

En posant :

$$u_{r+1} = x_i + t_{r+1}(u_r - x_i),$$

il vient :

$$\Omega^{(p)}(u_r) = (u_r - x_i)^3 \int_0^1 (1 - t_{r+1})^{\cdot 2}\, \Omega^{(p+3)}(u_{r+1})\, dt_{r+1}.$$

On continue alors en introduisant les autres conditions.

On peut enfin déterminer les constantes de l'intégrale d'ordre n, en donnant des valeurs des intégrales d'ordre

supérieur prises à partir d'une limite donnée. On commence par exprimer comme il vient d'être dit, l'intégrale de l'ordre le plus élevé; soit I_m cette intégrale; on aura

$$y = \psi(x) + D^{(m-n)}I_m.$$

La quantité I_m est exprimée par une intégrale multiple dont les limites sont indépendantes de x; on fera passer tous les facteurs qui contiennent x sous le signe et on dérivera sous le signe.

814. Théorème. — L'intégrale d'ordre n d'une fonction $F(x)$ est assujettie n conditions; on donne pour x égal à $x_1, x_2, \cdots x_k$ les valeurs de cette intégrale et un nombre suffisant de dérivées successives de ces valeurs; on obtient exactement la valeur y de cette intégrale, pour une valeur donnée x de la variable, en remplaçant $F(x)$ par $F(a)$, a étant une valeur convenablement choisie entre la plus petite et la plus grande des quantités $x, x_1, x_2, \cdots$ et x_k.

En effet, nous pouvons exprimer l'intégrale par la formule de M. Hermite (812). Le premier terme $\psi(x)$ est complétement déterminé; il est indépendant de la fonction $F(x)$. Le second terme est une limite de somme; la quantité $F(u)$ est multipliée par une expression qui ne change pas de signe, car toutes les différentielles et la fonction θ sont positives. On obtiendra une limite supérieure et inférieure de l'intégrale en remplaçant $F(u)$ par sa plus grande et sa plus petite valeur. On obtiendra la valeur exacte de l'intégrale en remplaçant $F(u)$ par $F(a)$, a étant une valeur comprise entre les limites extrêmes de u. Or, on reconnaît facilement en faisant varier les variables auxiliaires t_1, $t_2 \cdots t_k$ que u ne sort pas des limites $x, x_1, x_2 \cdots x_n$; le théorème est démontré.

Si nous remplaçons $F(u)$ par $F(a)$, on effectue facilement les intégrations indiquées par la formule de M. Hermite; mais ces calculs sont inutiles. Si la dérivée d'ordre n est constante et égale à $F(a)$, la fonction R est une fonction

entière de degré n de la forme $Af(x)$; on détermine A par la condition que la dérivée d'ordre n de R doit être égale à $F(a)$ et on trouve :

$$y = \psi(x) + f(x)\frac{F(a)}{1.2.3\ldots n}. \qquad (2)$$

On peut arriver à cette formule directement de la manière suivante[1]. Si on représente l'intégrale y par une courbe, la fonction $\psi(x)$ est l'ordonnée d'une parabole de degré $n-1$ passant par n points de la courbe y savoir α points en x_1, β points en x_2 etc... En ajoutant à $\psi(x)$ un terme de la forme $Af(x)$, on obtiendra une parabole de degré n passant par les mêmes points et par un nouveau point (x, y) de l'intégrale. Il suffit pour cela de déterminer A par l'équation :

$$\Omega(x) = \psi(x) + Af(x).$$

Or il est facile de démontrer que si deux courbes, satisfaisant à des conditions de continuité faciles à énoncer, ont $n+1$ points communs, leurs dérivées d'ordre n sont égales pour une abscisse intermédiaire. Il suffit pour le voir d'appliquer n fois le théorème de Rolle à la fonction représentée par la différence entre les ordonnées des deux courbes. On aura donc pour une certaine valeur a comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités x, x_1, $x_2 \cdots x_k$,

$$\Omega^{(n)}(a) = \psi^{(n)}(a) + Af^{(n)}(a),$$

ou encore

$$F(a) = 1.2.3\ldots n.A.$$

On tire de là la valeur A, et on retrouve :

$$y = \psi(x) + f(x)\frac{F(a)}{1.2.3\ldots n}.$$

(1) M. Peano, professeur à Turin, a employé un raisonnement de ce genre dans la détermination du reste de la formule d'interpolation de Newton.

Cette équation n'existe que pour la valeur choisie de x à moins que l'on ne considère a comme une variable.

Remarque. — Si on remplace la courbe y par la parabole $\psi(x)$, on obtient une formule d'interpolation; la formule (2) donne la valeur de l'erreur commise. Si on utilise la parabole $\psi(x)$ pour calculer l'aire limitée par la courbe y, on commet une erreur qui s'exprime par

$$\frac{F(a')}{1.2.3...n}\int fx\,dx,$$

dans le cas très-particulier où $f(x)$ ne change pas de signe.

On voit donc que la formule de M. Hermite contenait en substance la solution de tous ces problèmes.

Mais il y a des questions plus difficiles qui ne peuvent être résolues de cette manière. Ce sont les questions qui se ramènent au calcul d'une intégrale assujettie à des conditions d'une autre espèce. Nous avons montré, sans doute, que l'on pouvait généraliser la formule pour la rendre applicable à ces cas. Mais on ne peut plus trouver simplement les limites de l'intégrale. On trouve en effet sous le signe d'intégration des expressions de la forme

$$(u_r - x_i)^s \quad \text{ou} \quad D^{m-n}[f(x)\,F(u)].$$

La première expression change de signe; la seconde se décompose en un grand nombre de termes et on ne voit pas bien comment on parviendrait à trouver les limites de leur somme.

La méthode que nous allons exposer paraît plus convenable pour étudier ces questions.

§ III. — Solution par la théorie des accords.

815. Conditions de première espèce. — On demande de déterminer l'intégrale d'ordre n d'une fonction $F(x)$; on donne les valeurs suivantes de cette intégrale et de ses dérivées :

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ y_1,\ y'_1,\ y''_1,\ \ldots,\ y_1^{(\alpha-1)} \\ x_2,\ y_2,\ y'_2,\ y''_2,\ \ldots,\ y_2^{(\beta-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k,\ y_k,\ y'_k,\ y''_k,\ \ldots,\ y_k^{(\lambda-1)} \end{array}\right\} (1)$$

Nous allons démontrer que cette intégrale y est donnée par la formule :

$$y = \psi(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi . F(z)\, dz.$$

Dans cette formule, $\psi(x)$ représente une fonction entière de degré $n-1$ satisfaisant aux conditions (1); x_0 et X sont respectivement plus petit et plus grand que les valeurs $x, x_1, x_2, \ldots x_k$; φ est l'intégrale d'ordre n relative à un accord des $n+1$ surfaces concentrées suivantes: une surface égale à 1 en x, α surfaces en x_1, β surfaces en x_2, ... et λ surfaces en x_k.

En effet, nous pouvons mettre l'intégrale inconnue sous la forme suivante :

$$y = a + b(X - x) + c(X - x)^2 \cdots + l(X - x)^{n-1} + (-1)^{n-1} \int_{x_0}^{x} (z - x)^{n-1} F(z)\, dz.$$

Le dernier terme est l'intégrale moment prise à partir de x_0 et légèrement transformée par l'introduction du facteur $(-1)^{n-1}$; les autres termes forment une fonction entière qui représente les termes des constantes. Exprimons que

cette intégrale satisfait aux conditions (1), nous aurons des équations de la forme :

$$y_1 = a + b(X - x_1) + c(X - x_1)^{\cdot 2} \cdots + l(X - x_1)^{\cdot n-1}$$
$$+ (-1)^{n-1} \int_{x_0}^{x_1} (z - x_1)^{\cdot n-1} F(z)\, dz$$
$$- y_1' = b + c(X - x_1) \cdots$$
$$+ l(X - x_1)^{\cdot n-2} + (-1)^{n-1} \int_{x_0}^{x_1} (z - x_1)^{\cdot n-2} F(z)\, dz$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eliminons les constantes a, b, c, ... l par la méthode des coefficients indéterminés; à cet effet, nous ajouterons à l'équation qui donne y, les équations de conditions respectivement multipliées par les coefficients P_1 M_1, N_1, ... T_1 P_2, M_2, N_2, T_2 etc... Il vient

$$y = \psi(x) + R. \qquad (2)$$

$$\psi(x) = -\Sigma[P_1 y_1 - M_1 y_1' + N_1 y_1'' \cdots \pm T y_1^{(\alpha-1)}]. \qquad (3)$$

$$R = (-1)^{n-1} \int_{x_0}^{x} (z - x)^{\cdot n-1} F(z) dz + (-1)^{n-1} P_1 \int_{x_0}^{x_1} (z - x)^{\cdot n-1} F(z) dz +$$
$$+ (-1)^{n-1} M_1 \int_{x_0}^{x_1} (z - x)^{\cdot n-2} F(z) dz + \cdots$$

Les coefficients P, M, N... sont déterminés par les équations de conditions suivantes :

$$1 + \Sigma P_1 = 0.$$
$$(X - x_1) + \Sigma[P_1(X - x_1) + M_1] = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(X - x)^{\cdot n-1} + \Sigma[P_1(X - x_1)^{\cdot n-1} + M_1(X - x_1)^{\cdot n-2} \cdots +$$
$$+ T_1(X - x_1)^{\cdot n-\alpha-1}] = 0.$$

Comparons ces équations avec les équations du numéro 808; nous voyons qu'elles expriment qu'il y a accord parfait entre une surface concentrée égale à l'unité appliquée sur la verticale x et des systèmes de α surfaces en x_1, β surfaces en x_2 ..., λ surfaces en x_k.

Rangeons les abscisses par ordre de grandeur et soit x_0 x_1 x_2, $x \ldots x_k$, X cet ordre. Nous décomposerons toutes les intégrales qui figurent dans la valeur de R par la formule :

$$\int_{x_i}^{x_i} = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x} \cdots + \int_{x_{i-1}}^{x_i}.$$

En groupant les intégrales prises entre les mêmes limites, nous mettrons la valeur de R sous la forme :

$$R = R_1 + R_2 + R + R_3 \cdots + R_{k+1}.$$

Les termes que nous désignons par R_1 sont les intégrales prises de x_0 à x_1, on a :

$$R_1 = (-1)^{n-1} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ (z-x)^{\cdot n-1} + \Sigma [P_1 (z-x_1)^{\cdot n-1} + M_1 (z-x_1)^{\cdot n-2} \cdots] \right\} F(z)\,dz.$$

Remarquons que la quantité qui multiplie $F(z)\,dz$ est l'intégrale moment de toutes les aires de l'accord; cette intégrale est nulle; on a donc

$$R_1 = 0.$$

Les termes que nous désignons par R_2 sont les intégrales prises entre x_1 et x_2; nous trouverons :

$$R_2 = (-1)^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ (z-x)^{\cdot n-1} + \sum_{2}^{k} [P_2 (z-x_2)^{\cdot n-1} + M_2 (z-x_2)^{\cdot n-2} + \cdots] \right\} F(z)\,dz.$$

La quantité qui multiplie $F(z)\,dz$ deviendrait nulle comme tantôt, si on y ajoutait

$$P_1 (z-x)^{\cdot n-1} + M_1 (z-x_1)^{\cdot n-2} + \cdots$$

On a donc :

$$R_2 = (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} [P_1 (z-x_1)^{\cdot n-1} + M_1 (z-x_1)^{\cdot n-2} + \cdots] F(z)\,dz.$$

Or entre x_1 et x_2, l'ordonnée de la courbe intégrale

d'ordre n relative à l'accord a précisément pour valeur

$$\varphi = P_1(z - x_1)^{\cdot n-1} + M_1(z - x_1)^{\cdot n-2} + \cdots$$

On a donc

$$R_2 = (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \varphi . Fz . dz.$$

Cette transformation s'applique à tous les groupes d'intégrales. On a par exemple :

$$R_i = (-1)^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ \sum_i^k [P_i(z - x_i)^{\cdot n-1} + M_i(z - x_i)^{\cdot n-2} + \cdots] \right\} F(z) dz.$$

La quantité qui multiplie $F(z)\,dz$ s'annulerait si on ajoutait

$$\varphi = (z - x)^{\cdot n-1} + \sum_i^{i-1} [P_1(z - x_1)^{\cdot n-1} + M_1(z - x_1)^{\cdot n-2} + \cdots],$$

φ est l'ordonnée de la courbe intégrale d'ordre n de l'accord, entre x_{i-1} et x_i; on a donc :

$$R_i = (-1)^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi F(z) dz.$$

Comme il n'y a pas d'intégrales entre les limites x_k et X, on a évidemment

$$R_{k+1} = 0.$$

Remarquons qu'en dehors des limites de l'accord x_1 et x_k on a $\varphi = 0$, on peut donc aussi écrire :

$$R_1 = (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \varphi F(z) dz.$$

$$R_{k+1} = (-1)^n \int_{x_k}^{X} \varphi F(z)\, dz.$$

Il est d'ailleurs plus simple de supposer $x_0 = x_1$, $X = x_k$

(ou $X = x$). Réunissons les différentes parties de R, il vient

$$R = (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi . F(z)\, dz.$$

Nous en déduisons la formule qu'il s'agissait de démontrer :

$$y = \psi(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi . F(z)\, dz.$$

La fonction $\psi(x)$ est suffisamment connue; on l'obtient par les formules de Newton ou de Lagrange généralisées; c'est l'ordonnée d'une parabole que nous savons construire. La courbe φ est formée d'une suite d'arcs paraboliques ayant entre eux et avec l'axe des x des contacts d'ordres connus; on peut déterminer ces paraboles par leurs polygones d'intégration; les conditions des contacts déterminent ces polygones sans qu'il soit nécessaire de déterminer les éléments de l'accord. Si donc la courbe $F(z)$ est donnée, on pourra, par la règle seulement, déterminer par points la courbe $\varphi F(z)$ et la partie difficile de l'intégrale y sera donnée par une aire que l'on pourra évaluer au planimètre.

Autre démonstration. — Appliquons la formule d'intégration du numéro 800; on a

$$\int_{x_0}^{X} I_0 F(z)\, dz = (-1)^n \int_{x_0}^{X} I_n F^n(z)\, dz. \qquad (4)$$

Nous avons remplacé la fonction $f(x)$ par I_0. Supposons que les $I_0 dx$ se réduisent aux aires concentrées prévues dans l'énoncé du théorème et calculons le premier membre de l'équation (4). On a constamment $I_0 = 0$, sauf sur les verticales de concentration. On a, par exemple :

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} I_0 F(z)\, dz = \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} \left(\frac{u}{\varepsilon} + \frac{v}{\varepsilon^2} \cdots + \frac{w}{\varepsilon^\alpha} \right) F(z)\, dz.$$

En posant $z = x_1 - \varepsilon + t\varepsilon$, il vient

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} I_0 F(z)\, dz = \int_0^1 \left(\frac{u}{\varepsilon} + \frac{v}{\varepsilon^2} \cdots + \frac{w}{\varepsilon^\alpha}\right) F[x_1 - (1-t)\varepsilon]\, \varepsilon\, dt.$$

Développons la fonction F par la formule de Taylor; faisons converger ε vers zéro; remarquons que l'on a

$$\int_0^1 u\,dt = P_1, \quad \int_0^1 v\,dt = 0, \quad \int_0^1 w\,dt = 0,$$

$$\int_0^1 (1-t)\, v\,dt = M_1, \quad \int_0^1 (1-t)\, w\,dt = 0.$$

. . . . . .

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} w\,dt = T_1.$$

On en déduit

$$\lim \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} I_0\,dx = P_1 y_1 - M_1 y_1' + N_1 y_1'' \cdots \pm T_1 y_1^{(\alpha-1)}.$$

En suivant le même raisonnement pour les autres surfaces concentrées, on trouve

$$\int_{x_0}^{X} I_0 F(z)\,dz = y - \psi(x).$$

L'équation (4) devient donc

$$y = \psi(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{X} I_n F^n(z)\, dz.$$

C'est l'équation qu'il fallait démontrer.

On a aussi

$$y = \psi(x) + (-1)^i \int_{x_0}^{X} I_i F^{(i)}(z)\, dz$$

pour i plus petit que n.

816. Limites de l'intégrale. — La fonction φ est l'intégrale d'ordre n d'un accord parfait; donc la fonction φ ne change pas de signe. Si la fonction $F(z)$ est incomplètement connue, mais si on sait que $F(z)$ est constamment compris entre deux limites $F_1(z)$ et $F_2(z)$, on obtiendra deux limites de R par l'évaluation de deux aires

$$(-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi F_1(z)\, dz \quad \text{et} \quad (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi F_2(z)\, dz.$$

Si nous remplaçons $F(z)$ par une valeur convenable $F(a)$, a étant choisi entre x_0 et X, on pourra obtenir la valeur exacte de R; on a donc

$$R = (-1)^n F(a) \int_{x_0}^{X} \varphi dz.$$

Cette valeur de R peut se mettre sous une autre forme; on l'obtient en supposant $F(z) = F(a)$; mais alors R est une fonction entière de degré n de la forme :

$$R = Af(x),$$
$$f(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_k)^\lambda.$$

Déterminons le coefficient A par la condition que la dérivée d'ordre n de R est $F(a)$; on trouve :

$$R = f(x) \frac{F(a)}{1.2.3 \ldots n}.$$

On peut aussi obtenir cette formule par la théorie des accords. Nous avons trouvé que l'intégrale I_n d'un accord de n surfaces concentrées avait pour valeur $(-1)^{n-1}$; dans le cas d'un accord de $n+1$ surfaces, on a donc

$$I_{n+1} = (-1)^n.$$

Cette formule suppose certaines valeurs particulières des éléments de l'accord. Cherchons par la règle générale (807, 808) la valeur de l'aire concentrée sur la verticale x;

la fonction auxiliaire que nous avons désignée par $f(x)$ devient ici :

$$f_1(z) = (z - x)(z - x_1)^{\alpha}(z - x_2)^{\beta} \dots (z - x_k)^{\lambda} = (z - x)f(z).$$

Nous prenons z comme variable parce que x est une des abscisses données; nous introduisons le facteur $(z - x)$ pour la même raison. En appliquant la formule (7) du numéro 807 ou la première des formules (10) du numéro 808, nous trouverons pour l'aire concentrée sur la verticale x :

$$P = \left[\frac{f_1(z)}{z - x}\right]_{z=x} = \frac{1}{f(x)}.$$

Pour ramener la force P à l'unité, il faut multiplier toutes les ordonnées par $f(x)$ et alors on a

$$I_{n+1} = (-1)^n f(x).$$

La valeur de R devient :

$$R = (-1)^n F(a).I_{n+1} = f(x)\frac{F(a)}{1.2.3\dots n}.$$

817. Conditions de deuxième espèce. — On demande de déterminer l'intégrale d'ordre n d'une fonction $F(x)$; on donne comme précédemment des valeurs de cette intégrale et de ses dérivées; cependant pour une certaine valeur x_i, on donne au lieu de

$$y_i \quad y_i' \quad \dots \quad y_i^{(\delta-1)}$$

les valeurs suivantes :

$$y_i^{(p)}, \quad y_i^{(p+1)}, \quad \dots, \quad y_i^{(p+\delta-1)}.$$

Nous allons démontrer que cette intégrale est donnée par la formule

$$y = \psi(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi F(z)\, dz.$$

Dans cette formule, $\psi(x)$ représente une fonction entière

de degré $(n-1)$, satisfaisant aux conditions de la fonction y; x_0 et X comprennent entre elles les valeurs x, x_1 x_2 $\cdots$ x_k; α est l'intégrale d'ordre n relative à un accord de degré $n+1$; cet accord est formé de $n+p+1$ surfaces, savoir : une surface égale à l'unité sur la verticale x, α surfaces sur la verticale x_1, β surfaces sur la verticale x_2, et ainsi de suite sauf pour la verticale x_i où l'on concentrera $p+\delta$ surfaces formant un accord de dégré p.

Cette formule se démontre comme celle du numéro 814 sauf quelques petites modifications que nous allons faire connaître. On établira toutes les conditions du problème et on éliminera les constantes par la méthode des coefficients indéterminés. Pour la valeur x_i on exprimera $y_i\, y_i' \cdots y_i^{p+\delta-1}$ et on multipliera par des coefficients indéterminés; mais les valeurs y_i, $y_i' \cdots y_i^{(p-1)}$ ne peuvent pas figurer dans la formule; les p premiers coefficients sont donc nuls. On doit donc introduire sur la verticale x_i le même nombre de surfaces que si l'on donnait y_i, $y_i' \cdots y_i^{p+\delta-1}$, mais les p premières intégrales de ce système concentré doivent être égales à zéro. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer. La seconde démonstration ne subit aucune modification.

818. Limites de l'intégrale. — La fonction φ est l'ordonnée de la courbe intégrale d'ordre n d'un accord de degré $n+1$; mais cet accord est imparfait car il contient p surfaces surabondantes. En effet, on introduit sur la verticale x_i, $p+\delta$ surfaces; le nombre total de surfaces peut être égal à $1+\alpha+\beta+\gamma+p+\delta \ldots +\lambda$ ou $n+p+1$. Il résulte de là que la fonction φ peut changer de signe. On ne trouvera plus d'une manière certaine les limites de l'intégrale en remplaçant la fonction $F(x)$ par sa plus grande et sa plus petite valeur; nous aurons deux cas à distinguer.

1° *δ est un nombre pair.* Considérons d'abord la courbe intégrale d'ordre p relative à l'accord; nous savons que cette courbe limite des aires qui forment un accord de degré $n-p$; nous allons démontrer que si δ est pair, cet accord est

parfait. En effet, si nous faisons abstraction des surfaces concentrées sur la verticale x_i, nous avons dans l'accord primitif $n+p+1-(p+\delta)$ ou $n+1-\delta$ surfaces ; il y a au maximum $n-\delta$ changements de signe. Dans l'intégrale I_p, il n'en reste au plus que $n-p-\delta$. Si nous introduisons les aires concentrées dans la verticale x_i qui sont au nombre de $p+\delta-p$ ou δ, nous ne pourrons introduire que δ changements de signe nouveaux, savoir : $\delta-1$ entre les verticales x_i et $x_i+\varepsilon$, et un changement de signe à l'une des extrémités. Il n'y a de changement de signe qu'à l'une des extrémités parce que, si δ est pair, les surfaces extrêmes sont de signes différents, et l'une de ces surfaces sera de même signe que I_p. Le nombre de changements de signe de I_p, y compris les surfaces concentrées en x_i, est donc au plus de $n-p-\delta+\delta$ ou $n-p$. Donc l'accord déterminé par I_p est parfait. Il résulte de là que I_n ou φ ne change pas de signe.

On peut donc, dans le cas ou δ est pair, remplacer $F(x)$ par ses limites pour obtenir les limites de y et appliquer la formule :

$$y=\psi(x)+f(x)\frac{F(a)}{1.2.3...n}$$

$f(x)$ désignant une fonction entière $x^n+p_1x^{n-1}...$ satisfaisant à toutes les conditions de la fonction R ou $y-\psi(x)$[1].

2° *δ est un nombre impair.* — Reproduisons le raisonnement précédent, mais remarquons que si δ est impair on peut introduire $\delta+1$ changements de signe nouveaux dans I_p lorsqu'on ajoute les surfaces concentrées en x_i. Le nombre de changements de signe de I_p peut être de $n-p+1$; il peut rester un changement de signe dans I_n. La fonction φ peut donc changer de signe pour une certaine valeur $z=b$ et alors la détermination des limites de l'intégrale doit se

(1) On peut démontrer cette proposition par la formule de M. Hermite convenablement généralisée.

faire tout autrement que dans les cas précédents. On obtiendra une limite supérieure en remplaçant $F(z)$ par sa plus grande valeur, là où $(-1)^n\varphi$ est positif et par sa plus petite valeur là où $(-1)^n\varphi$ est négatif; on trouve les deux limites suivantes de R, si $F(z)$ est plus petit que $F_1(z)$ et plus grand que $F_2(z)$.

$$(-1)^n\int_{x_0}^{b}\varphi F_1(z)\,dz+(-1)^n\int_{b}^{X}\varphi F_2(z)\,dz,$$

$$(-1)^n\int_{x_0}^{b}\varphi F_2(z)\,dz+(-1)^n\int_{b}^{X}\varphi F_1(z)\,dz.$$

Si par exemple on sait que $F(z)$ est compris entre deux valeurs constantes M et m, ces deux limites peuvent s'écrire après une petite tranformation

$$f(x)\frac{m}{1.2.3\ldots n}+(M-m)(-1)^n\int_{x_0}^{b}\varphi dz.$$

$$f(x)\frac{m}{1.2.3\ldots n}+(M-m)(-1)^n\int_{b}^{X}\varphi dz.$$

Il faut déterminer b dans chaque cas particulier. On peut aussi trouver d'une autre manière les limites de R. On a identiquement

$$F(z)=F(b)+\frac{F(z)-F(b)}{z-b}(z-b).$$

La valeur de R devient :

$$R=f(x)\frac{F(b)}{1.2.3\ldots n}+(-1)^n\int_{x_0}^{X}\varphi.(z-b)\frac{F(z)-F(b)}{z-b}dz.$$

Mais l'expression $\varphi.(z-b)$ ne change plus de signe; on a donc :

$$R=f(x)\frac{F(b)}{1.2.3\ldots n}+(-1)^n\frac{F(a)-F(b)}{a-b}\int_{x_0}^{X}\varphi(z-b)\,dz.$$

On peut traduire cette formule en langage ordinaire en disant que l'on obtient la valeur exacte $F(x)$ en remplaçant la courbe $F^n(z)$ par une droite passant par le point $F(b)$ et un point $F(a)$ convenablement déterminé.

L'intégrale qui subsiste dans la formule précédente est égale et de signe contraire au moment statique de l'aire limitée par la courbe φ, l'axe des moments étant pris en b; on a donc

$$\int_{x_0}^{X} \varphi\,(z-b)\,dz = (c-b)\int_{x_0}^{X} \varphi\,.\,dz,$$

c est l'abscisse du centre de gravité de l'aire; c'est aussi le centre de l'accord. Remplaçons dans la valeur de R l'intégrale par sa valeur, il vient :

$$R = \frac{f(x)}{1.2.3\ldots n}\left[F(b) + \frac{Fa - Fb}{a-b}(c-b)\right].$$

Cette formule s'interprête facilement; représentons la fonction $F(z)$ par une courbe; joignons le point $F(b)$ à un certain point $F(a)$; la corde ainsi tracée et prolongée détermine sur la verticale centrale de l'accord une ordonnée N qui est la représentation de la parenthèse; on a

$$R = f(x)\frac{N}{1.2.3\ldots n}.$$

Cette ordonnée N est l'ordonnée constante qu'il faut substituer aux ordonnées variables $F(z)$ pour ne pas changer R; la corde qui passe par les points $F(b)$ et $F(a)$ est comprise entre deux limites faciles à déterminer, et l'on obtiendra ainsi une limite supérieure et une limite inférieure de N.

Nous venons de supposer que l'on détermine la verticale centrale de l'accord; on peut éviter cette recherche de la manière suivante. L'expression

$$(-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi\,.\,(z-b)\,dz$$

est la valeur de R pour le cas particulier où $F(z)=(z-b)$; or dans ce cas la valeur de R est une fonction entière de x de degré $n+1$ satisfaisant au conditions ordinaires de la fonction R et aux deux conditions

$$R^{(n)}(b)=0, \quad R^{(n+1)}=1.$$

Cette fonction entière se déterminera comme la fonction $f(x)$ et sera de la forme :

$$\frac{x^{n+1}+p_1x^n+\cdots}{1.2.3\ldots(n+1)}=\frac{f_1(x)}{1.2.3\ldots n+1}.$$

On aura alors :

$$R=f(x)\frac{F(a)}{1.2.3\ldots n}+f_1(x)\frac{Fa-F(b)}{1.2.3\ldots(n+1)(a-b)}.$$

Les fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ sont de la forme :

$$f(x)=(x-x_1)^\alpha(x-x_2)^\beta\cdots(x-x_k)^\lambda[x^\delta+Ax^{\delta-1}\cdots],$$
$$f_1(x)=(x-x_1)^\alpha(x-x_2)^\beta\cdots(x-x_k)^\lambda[x^{\delta+1}+A_1x^\delta+\cdots].$$

Les coefficients indéterminés A, B, A_1, B_1 etc. se déterminent par les conditions :

$$f^{(p)}(x_i)=0, \quad \ldots, \quad f^{(p+\delta-1)}(x_i)=0,$$
$$f_1^{(p)}(x_i)=0, \quad \ldots, \quad f_1^{(p+\delta-1)}(x_i)=0, \quad f_1^{(m)}(b)=0.$$

819. Conditions de troisième espèce. — On demande de déterminer l'intégrale d'ordre n d'une fonction $F(x)$; cette intégrale doit satisfaire à $n-n'$ conditions de première et de seconde espèce. On donne en outre n' conditions nouvelles de la forme suivante. On intègre n' fois la fonction y et on donne $2n'$ conditions de cette intégrale Y.

L'intégrale Y est alors une intégrale d'ordre $n+n'$ de la fonction $F(x)$; on donne $n+n'$ conditions de cette intégrale, on aura donc :

$$Y=\psi(x)+(-1)^{n+n'}\int_{x_0}^{X}\varphi.F(z)dz.$$

En prenant la dérivée d'ordre n', on trouve :

$$y = \psi^{(n')}(x) + (-1)^{n+n'} \int_{x_0}^{X} D^{n'}\varphi . F(z)dz.$$

La fonction $\psi^{(n')}(z)$ est une fonction entière de degré $n - 1$; elle correspond au cas où $F(z)$ est identiquement nulle. La fonction φ est l'intégrale relative à un accord de degré $n + n' + 1$; il est facile de voir que $D^{n'}\varphi$ est aussi l'intégrale d'un accord de même ordre mais dérivé du précédent.

Nous obtenons φ en concentrant une aire égale à l'unité sur la verticale x; l'intégrale quelconque de cette aire est

$$I_{\mu+1} = (X - x)^{\cdot\mu}.$$

En prenant la dérivée d'ordre n' par rapport à x, on a

$$I_{\mu+1}^{(n')} = (X - x)^{\cdot\mu-n'}(-1)^{n'}.$$

C'est l'intégrale d'ordre $\mu + 1$ d'un système de $n' + 1$ surfaces formant un accord d'ordre $n' + 1$ et dont l'intégrale constante (ou d'ordre n') est égale à $(-1)^{n'}$. Nous commencerons par déterminer l'accord en supposant que l'intégrale constante soit 1 ; soit u l'ordonnée de la courbe intégrale d'ordre $n + n'$ de cet accord, nous prendrons

$$D^{n'}\varphi = u(-1)^{n'}.$$

Il vient alors

$$y = \psi^{(n')}(x) + (-1)^{n} \int_{x_0}^{X} u\, F(z)\, dz.$$

Comme dans les problèmes précédents, on peut déterminer par des constructions linéaires la courbe $\psi^{n'}(x)$, la courbe u, le produit $uF(z)$ et l'intégrale par le planimètre ou une quadrature approchée, graphique ou analytique.

820. Limites de l'intégrale. — Le cas le plus simple est celui où les conditions de la fonction Y sont de première espèce. L'accord dont φ est l'intégrale est un accord parfait ;

mais il n'en est pas de même de celui dont u est l'intégrale. Ce dernier est un accord de degré $n+n'+1$, mais il contient autant de surfaces qu'il y a de conditions, soit $n+n'$, plus les $n'+1$ surfaces de l'accord concentré en x. Il y a donc n' surfaces surabondantes. Mais en raisonnant comme au numéro 818, nous allons démontrer que la fonction u ne peut conserver qu'un changement de signe. Faisons d'abord abstraction de l'accord concentré en x; avant toute intégration, il y a $n+n'$ surfaces et au maximum $n+n'-1$ changements de signe; ce nombre sera réduit à $n-1$ dans l'intégrale d'ordre n' de l'accord. Introduisons l'accord concentré dans l'intégrale d'ordre n'; c'est une aire concentrée; donc nous introduirons deux changements de signe nouveaux; cela porte le nombre de changements de signe à $n+1$. Il faut encore intégrer n fois; il restera au plus un changement de signe. Déterminons dans chaque cas particulier la valeur $z=b$ où le changement de signe de u se produit. S'il n'existe pas, on raisonne comme au numéro 816; s'il existe on raisonne comme au numéro 818, 2°.

Mais il peut se présenter des cas plus compliqués. Les conditions de la fonction Y peuvent être en partie de seconde espèce. Il peut y avoir un nombre plus ou moins considérable de changements de signe de la fonction u. Supposons pour fixer les idées, qu'il y ait trois changements de signe pour les valeurs b, b', b'' de z. Nous pouvons toujours considérer $F(z)$ comme l'ordonnée d'une parabole variable du troisième degré passant par les points $F(b)$, $F(b')$, $F(b'')$ et $F(z)$; cette parabole se décompose en deux paraboles partielles; une parabole du second degré passant par les points $F(b)$, $F(b')$, $F(b'')$ dont l'ordonnée est V; une parabole du troisième degré passant par les points (o, b), (o, b'), (o, b'') et dont l'ordonnée est

$$(z-b)(z-b')(z-b'')\,W,$$

W est une fonction de z qui s'exprime au moyen de Fz, $F(b)$, $F(b')$, $F(b'')$ en posant :

$$F(z) = V + (z-b)(z-b')(z-b'')W.$$

On a alors

$$R = (-1)^n \int_{x_0}^{X} uV\,dz + (-1)^n \int_{x_0}^{X} u(z-b)(z-b')(z-b'')W\,dz.$$

Mais la fonction $u(z-b)(z-b')(z-b'')$ ne change plus de signe; donc on obtiendra exactement la valeur de R en remplaçant $W(z)$ par $W(a)$, si a est une valeur intermédiaire convenablement choisie. Cela revient à remplacer $F(z)$ par

$$U = V + (z-b)(z-b')(z-b'')W(a).$$

Cette expression est l'ordonnée d'une parabole du troisième degré passant par les points $F(b)$, $F(b')$, $F(b'')$ et un certain point $F(a)$. De là résulte le théorème suivant : on obtient l'intégrale exacte, en remplaçant la courbe $F(z)$ par une parabole qui coupe cette courbe sur les verticales où la fonction u change de signe et sur une verticale intermédiaire a, qu'il faut déterminer convenablement; le degré de la parabole est égal au nombre de changements de signe de la fonction u.

La parabole peut se déterminer par la formule de Newton; on a :

$$U = A + B(z-b) + C(z-b)(z-b') + D(z-b)(z-b')(z-b'').$$

On en déduira une valeur de la forme

$$y = \psi^{n'}(x) + f(x)\frac{A}{1.2.3\ldots n} + f_1(x)\frac{B}{1.2.3\ldots n+1} + f_2(x)\frac{C}{1.2.3\ldots n+2} + f_3(x)\frac{D}{1.2.3\ldots n+3}.$$

Le coefficient A est égal à $F(b)$; les autres s'expriment par des différences; le coefficient D est imparfaitement connu

parce qu'il contient $F(a)$; on trouvera les limites supérieures et inférieures de l'intégrale en déterminant graphiquement ou par calcul les limites de D. Les fonctions $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sont des fonctions entières dont les termes de degré le plus élevé sont respectivement x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+3}; elles satisfont à toutes les conditions de la fonction R et à d'autres conditions

$$f_1^{(n)}(b) = 0; \quad f_2^{(n)}(b) = 0, \quad f_2^n(b') = 0; \quad f_3^{(n)}(b) = 0,$$
$$f_3^n(b') = 0, \quad f_3^n(b'') = 0;$$

on peut les déterminer par l'algèbre. Les valeurs de b, b', b'' sont des racines d'équations algébriques; elles dépendent de la valeur x.

821. Réciprocité des intégrales d'aires concentrées. — Nous venons de voir que dans tous les cas, l'intégrale d'ordre n qui satisfait aux conditions de la fonction R est donnée par

$$R = (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi . F(z)\, dz.$$

Supposons que la fonction $F(z)$ s'annule pour toutes les valeurs de z, sauf entre z et $z + \varepsilon$, et que l'on ait

$$\int_{x_0}^{X} F(z)\, dz = \int_{z}^{z+\varepsilon} F(z)\, dz = 1.$$

La formule donnera si ε tend vers zéro,

$$R = (-1)^n \varphi(z)$$

Mais alors la fonction R peut se trouver directement; c'est l'intégrale d'ordre n d'une aire concentrée en z, cette intégrale satisfaisant aux conditions connues de la fonction R; on trouvera

$$R = \varphi_1(x).$$

On en déduit

$$\varphi_1(x) = (-1)^n \varphi(z).$$

De là résulte une propriété curieuse des deux intégrales φ et φ_1. La courbe φ s'obtient en concentrant une aire égale à l'unité sur la verticale x (ou un système d'aires si les conditions sont de troisième espèce), et en prenant l'intégrale d'ordre n d'un accord suffisamment connu; on en déduit $\varphi(z)$. Faisons l'inverse; plaçons une aire concentrée égale à 1 dans la verticale z, et traçons l'intégrale d'ordre n satisfaisant aux conditions bien connues de la fonction R. On retrouve dans la section x la même ordonnée, au signe près, que nous avions trouvée tantôt dans la section z. Cette loi de réciprocité permet de découvrir des propriétés curieuses de la flexion des poutres droites.

NOTE VI.

L'interpolation parabolique.

Une courbe inconnue ou trop compliquée est déterminée par n points $(x_1, y_1)\ (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ (ou des points et des dérivées); l'interpolation parabolique consiste à remplacer cette courbe par une parabole de degré $n - 1$. Nous nous proposons d'évaluer l'erreur commise.

822. Calcul de l'erreur. — Considérons la fonction $F(x)$ comme l'intégrale d'ordre n de sa dérivée $F^n(x)$; cette intégrale satisfait à n conditions de première espèce; on a (815)

$$F(x) = \psi(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi . F(z)\, dz. \qquad (1)$$

La fonction $\psi(x)$ est précisément l'ordonnée de la parabole d'interpolation; l'erreur commise s'exprime par

$$R = (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi\, F^{(n)}(z)\, dz. \qquad (2)$$

Connaissant la courbe $F^{(n)}(z)$, on trouvera R par une

quadrature. Si $F_n(z)$ est plus petit que $F_1(z)$ et plus grand que $F_2(z)$, on trouvera deux limites de R par deux quadratures. On a enfin

$$R = f(x)\frac{F^{(n)}(a)}{1.2.3 \dots n}. \qquad (2)$$

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

ou $$f(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_k)^\lambda.$$

Supposons la fonction $\psi(x)$ exprimée par la formule de Newton, généralisée s'il y a lieu; en ajoutant un nouveau terme $wf(x)$, nous obtiendrons une parabole de degré n passant par le point (x, y), si nous calculons w par la formule $y = \psi(x) + wf(x)$. En comparant cette équation avec l'équation (1), on trouve :

$$w = (-1)^n \int_{x_0}^{X} \frac{\varphi}{f(x)} F^{(n)}(z)\, dz.$$

Remarquons d'abord que diviser φ par $f(x)$, c'est précisément ramener les éléments de l'accord à leurs valeurs types (816); remarquons ensuite que w s'exprime par une formule aux différences finies (ou infiniment petites); on a donc :

$$\frac{\Delta}{\Delta x_n} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_n x_{n-1}} \cdots \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} = (-1)^n \int_{x_0}^{X} I_n F^n(z)\, dz. \qquad (4)$$

$$\int_{x_0}^{X} I_n\, dz = (-1)^{\cdot n}.$$

On a aussi

$$\frac{\Delta}{\Delta x_n} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_n x_{n-1}} \cdots \frac{\Delta_2 y_1}{\Delta_2 x_1} = \frac{F^{(n)} a}{1.2 \dots n}. \qquad (5)$$

On sait comment cette formule se modifie lorsque les points forment des groupes de points infiniment voisins (763).

823. Développement de l'erreur. — Supposons la fonction $F(x)$ développable par la formule de Taylor; comme nous pouvons placer l'origine où nous voulons, nous appliquerons la formule de Maclaurin

$$F(x) = F(0) + x\,F'(0) + x\,F''(0)\cdots + x^{n+\mu}F^{(n+\mu)}(0) + \cdots$$

Si la fonction $F(x)$ est entière, le développement est limité. Divisons par la fonction $f(x)$ définie au numéro précédent et rappelons les formules (807)

$$E\frac{x^{n+\mu}}{f(x)} = x^{\mu} + q_1x^{\mu-1} + q_2x^{\mu-2}\cdots$$

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2}$$

$$q_1 + p_1 = 0$$

$$q_2 + q_1p_1 + p_2 = 0$$

$$q_3 + q_2p_1 + q_1p_2 + p_3 = 0 \text{ etc.}$$

On trouve :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{f(x)} + \Sigma\,(x^{\mu} + q_1x^{\mu-1} + q_2x^{\mu-2} + \cdots)\,\frac{F^{(n+\mu)}(0)}{1.2.3\ldots(n+\mu)}$$

On obtient cette formule en prenant la partie entière de la division de chaque terme, et en réunissant toutes les parties fractionnaires en un seul terme. On a alors :

$$F(x) = \psi(x) + f(x)\,\Sigma(x^{\mu} + q_1x^{\mu-1} + q_2x^{\mu-2}\cdots)\,\frac{F^{(n+\mu)}(0)}{1.2.3\ldots(n+\mu)}.$$

La fonction $\psi(x)$ est entière et de degré $(n-1)$; comme tous les autres termes contiennent $f(x)$ en facteur commun, $\psi(x)$ est la fonction fournie par l'interpolation; nous avons donc trouvé l'erreur sous la forme du développement

$$R = f(x)\left[\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} + (x+q_1)\,\frac{F^{(n+1)}(0)}{1.2.3\ldots n+1} + \cdots\right] \quad (6)$$

La fonction $F(x)$ s'exprime par un développement infini si elle n'est pas entière; il en est de même de la fonction R,

mais alors il est nécessaire de compléter le développement de l'erreur par un reste.

824. Développement et reste. — Considérons la fonction $F(x)$ comme l'intégrale d'ordre $n+i$ de $F^{(n+i)}(x)$; elle doit satisfaire aux n conditions de la fonction $F(x)$, mais nous ajouterons i conditions nouvelles; on donne

$$F^{(n)}(o) \quad F^{(n+1)}(o) \dots F^{(n+i-1)}(o).$$

Nous trouverons encore :

$$F(x) = \psi_i(x) + (-1)^{n+i} \int_{x_0}^{X} \varphi_i F^{(n+i)}(z)\, dz.$$

La fonction $\psi_i(x)$ est une fonction entière de degré $n+i-1$; elle correspond au cas où $F^{n+i}(z)$ est identiquement nulle; donc la fonction $\psi_i(x)$ est donnée exactement par le développement limité aux termes qui contiennent des dérivées d'ordre égal et inférieur à $n+i-1$. Il serait d'ailleurs facile de reconnaître que le développement dont il s'agit satisfait à toutes les conditions de la fonction $\psi_i(x)$; on voit sans peine que si la fonction $\psi(x)$ s'exprime par la formule de Lagrange, chaque terme du développement de $F(x)$ satisfait à une des conditions données sans nuire aux autres, parce que les autres quantités données s'annulent. Ce serait une nouvelle manière de trouver le développement complet dans le cas d'une fonction entière.

Si $\psi_i(x)$ est le développement de $F(x)$, on voit qu'il faut ajouter à ce développement un reste

$$R_i = (-1)^{n+i} \int_{x_0}^{X} \varphi_i F^{(n+i)}(z)\, dz. \tag{7}$$

Les conditions qui déterminent $F(x)$ ou R_i sont en partie de seconde espèce (817). On peut toujours trouver R_i par une quadrature, mais il y a deux cas à distinguer lorsqu'il s'agit de chercher les limites de l'intégrale.

Si le nombre i est pair, on donne un nombre pair de

dérivées $F^{(n)}(o)$ à $F^{(n+i-1)}(o)$ en un point, sans donner les dérivées d'ordre inférieur. Nous avons démontré que dans ce cas la fonction φ_i ne changeait pas de signe; on peut donc remplacer $F^{(n+i)}(z)$ par $F^{(n+i)}(a)$. Mais alors $F(x)$ ou R est une fonction entière donnée exactement par le développement, on a donc :

$$R_i = f(x)(x^i + q_1 x^{i-1} \dots) \frac{F^{(n+i)}(a)}{1.2.3 \dots (n+i)}. \qquad (8)$$

En d'autres termes, quand on arrête le développement de l'erreur à nombre pair de termes, il faut ajouter comme reste le terme suivant, mais remplacer la dérivée $F^{(n+i)}(o)$, par la valeur de cette dérivée pour une valeur intermédiaire parmi toutes celles qui doivent être considérées, y compris o et x.

Si le nombre i est impair, la fonction présente un changement de signe; ce changement de signe se produit précisément pour la valeur o. En effet, nous formerons l'accord dont φ_i est l'intégrale en introduisant outre les aires concentrées sur les verticales x, x_1, $x_2 \dots x_n$, un système d'aires concentrées sur la verticale o. Ce dernier système est un accord d'ordre $n+1$; il n'intervient que dans les intégrales d'ordre supérieur à n. Si nous en faisons d'abord abstraction, nous pouvons dire que les autres surfaces forment un accord parfait de degré $n+1$; en effet il y a $n+1$ surfaces et les intégrales de o à n s'annulent aux limites. Cet accord parfait est d'ailleurs celui que nous avons considéré au numéro 822. L'intégrale I_n de cet accord ne peut donc pas changer de signe. Continuons alors les intégrations; les discontinuités qui se produisent sur la verticale o sont inconnues; mais comme les intégrales I_{n+1} à I_{n+i} s'annulent aux limites, nous pouvons construire séparément les deux parties des courbes intégrales, en partant de ces limites et en nous arrêtant sur la verticale o; les discontinuités seront par cela même déterminées. Si on

veut se donner la peine de se représenter la figure, on voit immédiatement que de x_0 à o toutes les intégrales sont de même signe que I_n. Mais si on part de X pour construire les autres courbes intégrales, on trouve alternativement des intégrales de signe contraire et de même signe que I_n. Nous retrouvons ainsi que si i est pair, I_{n+i} ne change pas de signe; mais nous voyons en outre que si i est impair, il se produit un changement de signe sur la verticale o, grâce à la discontinuité. Nous devons alors appliquer la méthode du numéro 818, second cas. Nous obtiendrons la valeur exacte de $F(x)$ en remplaçant dans la valeur de R_i, la courbe $F^{(n+i)}(z)$ par une droite passant par le point $F^{(n+i)}(o)$ et un point convenablement déterminé $F^{(n+i)}(a)$. En d'autres termes, nous obtiendrons un résultat exact par la fausse hypothèse

$$F^{(n+i)}(z) = F^{(n+i)}(o) + \frac{z}{a} F^{n+i}(a).$$

Mais alors l'intégrale est une fonction entière qui sera donnée par le développement limité à la dérivée d'ordre $n + i + 1$ dont la valeur est

$$F^{n+i+1}(o) = \frac{F^{n+i}(a)}{a}.$$

Donc si i est impair, on prend un terme de plus dans le développement et on ajoute le reste

$$R_{i+1} = f(x)(x^{i+1} + q_1 x^i + \cdots) \frac{F^{(n+i)}(a)}{1.2.3 \ldots (n+i+1)a}. \quad (9)$$

On obtiendrait une autre valeur du reste en remarquant que si i est impair, $i + 1$ est pair; on peut donc appliquer la formule (8) qui devient

$$R_{i+1} = f(x)(x^{i+1} + q_1 x^i + \cdots) \frac{F^{(n+i+1)}(a')}{1.2.3 \ldots (n+i+1)}. \quad (10)$$

La formule (7) ne résout pas la question, si comme nous l'avons supposé précédemment, on ne connaît pas la dérivée $F^{(n+i+1)}(z)$.

Si on prend l'origine aux points x_0 et X, le changement de signe n'existe jamais; on applique toujours la formule (8).

825. Généralisation. — Loi suprême aux différences. — On remplace une courbe $F(x)$ par une autre courbe $\psi(x)$ passant par n points donnés de la première; ces points sont distincts ou forment des groupes de points infiniment voisins. Nous pouvons appliquer à la fonction $F(x) - \psi(x)$ toutes les formules données précédemment pour la fonction $F(x)$; il suffit de remarquer que la fonction $F(x) - \psi(x)$ satisfait déjà aux conditions de la fonction R et que par conséquent la parabole d'interpolation disparaît. On a :

$$F(x) = \psi(x) + R$$

$$R = (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi . [F^n(z) - \psi^n(z)]\, dz. \qquad (8)$$

Toutes les formules des numéros précédents sont encore applicables, il suffit de remplacer les dérivées $F^{(\mu)}(z)$ par $F^{(\mu)}(z) - \psi^{(\mu)}(z)$, dans les formules (2) à (10).

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ des fonctions connues; prenons $\psi(x) = \Sigma A_i \varphi_i$ et déterminons les paramètres de manière à réaliser les conditions de la fonction ψ; nous obtiendrons la loi suprême de Wronski aux différences; l'erreur sera donnée sous forme d'une quadrature, d'un terme unique ou d'un développement avec reste.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que $F(x)$ pouvait être considéré comme une intégrale; cela revient à admettre certaines conditions de continuité faciles à énoncer. Ces conditions doivent exister également pour la fonction $\psi(x)$. Toutefois il est facile de voir que toutes les formules seraient encore vraies si on introduisait identiquement les mêmes discontinuités dans les intégrations qui donnent $\psi(x)$ et $F(x)$, parce que la différence $F(x) - \psi(x)$ ne conserverait plus de traces de ces discontinuités.

NOTE VII.

Compléments d'intégration graphique.

826. Intégration des paraboles. — Un arc parabolique (fig. 341) est compris entre deux verticales x_0 et X; il est déterminé par un nombre suffisant de points; on se propose de déterminer exactement les extrémités des courbes intégrales de divers ordres.

La méthode la plus simple est de considérer la parabole donnée comme l'intégrale d'un certain ordre d'une ligne droite; on détermine son polygone d'intégration (742) et alors les intégrations ultérieures s'effectuent très-élégamment. En outre, toutes les courbes sont complètement déterminées; on en trouve rapidement un point et une tangente quelconques.

On peut aussi opérer de la manière suivante. Portons à partir de x_0 des segments indéterminés $\alpha_1 = x'_1 - x^0$ $\alpha_2 = x'_2 - x'_1$ etc., et intégrons les rectangles $\alpha_1 y_1$, $\alpha_2 y_2$ ...; nous obtenons le polygone $z_0 z_1 z_2$ ... Z. Portons ensuite de nouveaux segments $\beta_1 = x''_1 - x_0$, $\beta_2 = x''_2 - x''_3 \ldots$, le nombre de ces nouveaux segments étant supérieur d'une unité au nombre de points de la parabole; intégrons les rectangles $z_0 \beta_1$, $z_1 \beta_2$ .., nous obtenons un polygone $u_0 u_1 u_2$ ... U. Continuons de la même manière en augmentant chaque fois le nombre de segments d'une unité. On peut déterminer ces segments de telle façon que quelles que soient les ordonnées y_1, y_2 ... de la parabole et les constantes d'intégration z_0, u_0 ... les points Z, U, V... soient exactement les extrémités des courbes intégrales.

On a, en effet

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots$$

$$Z = z_0 + a(X - x_0) + b\frac{X^2 - x_0^2}{2} + \cdots$$

$$U = u_0 + z_0(X - x_0) + a\frac{X^2 - x_0^2}{2} + \cdots \text{ etc.}$$

En exprimant les conditions y_1, y_2 ..., on peut éliminer les coefficients a, b, c et on trouve une équation de la forme

$$Z = z_0 + \Sigma \alpha_i y_i.$$

On reconnaît que $\Sigma \alpha_i = X - x_0$ en appliquant la formule au cas où la parabole est une horizontale. Cette formule démontre la règle de la première intégration.

Eliminons de même les coefficients a, b, c de la valeur de U, puis les ordonnées y_1, y_2 ... au moyen de z_0 z_1 z_2 ...; nous trouverons

$$U = u_0 + \Sigma \beta_i z_0.$$

On reconnaît que $\Sigma \beta_i = X - x_0$ en appliquant la formule au cas où l'intégrale première est une horizontale. On continue de la même manière. On voit que les segments peuvent se déterminer par de simples calculs d'algèbre.

On pourrait déterminer la parabole primitive par des points et tangentes. Dans ce cas, on introduit les ordonnées d'un point quelconque de chaque tangente et la méthode est encore applicable. Il peut se faire que l'un des côtés des polygones que l'on obtient s'annule; dans ce cas, on le prolonge et on introduit l'ordonnée d'un point quelconque de son prolongement, pour effectuer les intégrations ultérieures. Si on donnait des dérivées d'ordres supérieurs de la parabole primitive, on pourrait les introduire en prenant des points sur la parabole osculatrice d'un dégré égal à l'ordre de la dérivée. Les nombreuses constructions que l'on peut déduire au moyen de ces considérations ont toutes un inconvénient; les directrices des polygones, c'est-à-dire les verticales des sommets, ne se déterminent pas par une loi simple; pour chaque degré de la parabole, pour chaque mode de subdivision de la parabole, pour chaque intégration, il y a un système de coefficients à retenir.

La théorie des accords permet aussi de déterminer les directrices d'intégration; elle donne en outre une propriété

curieuse de ces directrices. Déterminons l'ordonnée de la parabole primitive par la formule de Lagrange

$$y = \Sigma \frac{f(x)}{x - x_1} \frac{y_1}{f'(x_1)}.$$

Nous avons fait remarquer que la parabole pouvait être décomposée en paraboles partielles; l'ordonnée de chacune de ces paraboles partielles est représentée par un terme de la formule de Lagrange. L'intégrale première devient

$$Z = z_0 + \Sigma \alpha_1 y_1,$$

si on pose

$$\alpha_1 = \frac{1}{f'(x_1)} \int_{x_0}^{X} \frac{f(x)}{x - x_1} dx.$$

On voit donc que les rectangles $\alpha_1 y_1$, $\alpha_2 y_2$ ... dont nous avons parlé plus haut, sont des rectangles équivalents aux différentes paraboles partielles; les bases de ces rectangles s'obtiennent par des intégrales faciles à calculer.

Considérons l'intégrale seconde comme une courbe des moments statiques et remplaçons les paraboles partielles par leurs poids résultants; nous obtiendrons le polygone de la seconde intégrale; les directrices de la seconde intégration tombent donc aux centres de gravité des paraboles partielles. Prenons pour la première parabole partielle la verticale x_1 comme axe des moments; on aura

$$(x_1 - x_1'') \int_{x_0}^{X} \frac{f(x)}{x_1 - x} dx = \int_{x_1}^{X} f(x)\, dx$$

formule d'où l'on tire la valeur de x_1'' (1).

Cherchons de même la tangente extrême de l'intégrale troisième. Remarquons que cette tangente serait l'intégrale

(1) Si les points sont en nombre impair et symétriquement placés, on a toujours $x_i'' = x_i$.

exacte, si on supposait que l'intégrale seconde fût une horizontale $u = U$. Pour réaliser cette hypothèse, il faut prendre $y = 0$ au-delà de la verticale X et introduire une aire concentrée — Z sur cette verticale. On forme alors un accord du second degré comprenant les aires concentrées z_0, — Z et les paraboles partielles; la tangente que nous cherchons est l'intégrale troisième de cet accord. Décomposons cet accord en accords partiels de même degré; nous prendrons comme premier accord partiel

$$z_0 \quad \text{et} \quad \theta_1 y_1 \frac{f(x)}{(x - x_1) f'(x_1)}$$

θ étant un coefficient à déterminer de manière à réaliser l'accord; nous prendrons comme second accord partiel

$$(1 - \theta_1) y_1 \frac{f(x)}{(x - x_1) f'(x_1)} \quad \text{et} \quad \theta_2 y_2 \frac{f(x)}{(x - x_2) f'(x_2)}$$

puis

$$(1 - \theta_2) y_2 \frac{f(x)}{(x - x_2) f'(x_2)} \quad \text{et} \quad \theta_3 y_3 \frac{f(x)}{(x - x_3) f'(x_3)}$$

et ainsi de suite. On terminera par

$$(1 - \theta_n) y_n \frac{f(x)}{(x - x_n) f'(x_n)} \quad \text{et} \quad - Z.$$

L'intégrale troisième de chacun de ces accords est une droite qui passe par le centre de l'accord; en superposant ces intégrales on obtiendra un polygone; c'est le polygone $v_0 v_1 \ldots V$; le côté extrême est la tangente cherchée. L'un des côtés de ce polygone, soit $v_2 v_3$, est l'intégrale première d'une constante égale à la somme des moments des accords partiels introduits de x_0 à v_2. On reconnaît que, pour ce groupe d'accords, l'intégrale première est $z_0 z_1 x_2' X$; en menant la ligne pointillée $z_1 x_2'$ nous modifions la seconde parabole de manière à réaliser l'accord. L'intégrale seconde est $u_0 u_1 u_2 U'$; donc c'est bien l'ordonnée u_2 qui donne

l'intégrale seconde constante de ce groupe d'accords et c'est en intégrant la droite u_2 U' qu'on trouvera le côté $v_2 v_3$. Nous avons prouvé que les côtés du polygone v_0 V s'obtiennent en intégrant des constantes $u_0 u_1 u_2 \ldots$ De plus nous avons démontré que les directrices de la troisième intégration tombent au centre des accords du second degré que l'on peut former par deux paraboles partielles relatives à deux abscisses adjacentes, les paraboles extrêmes étant combinées avec des aires concentrées aux extrémités de l'arc.

Il est facile de trouver les directrices des autres intégrations par un raisonnement du même genre. La parabole et les systèmes concentrés z_0, u_0, — Z, — U forment un accord du troisième dégré; on le décompose en accords partiels de trois paraboles; aux extrémités on forme des accords de deux paraboles et une aire concentrée, d'une parabole et deux aires concentrées; les directrices de la quatrième intégration tombent aux centres de ces accords. On continue de la même manière.

Il est facile d'établir les formules qui déterminent les centres de ces accords. On calcule les intégrales suivantes;

$$\int_{x_0}^{X} \frac{fx}{x - x_1}\, dx = a_1$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = J_1$$

$$\int_{x_0}^{X} (X - x) f(x)\, dx = J_2, \text{etc.}$$

On peut alors trouver l'intégrale d'ordre quelconque d'une parabole partielle en remarquant que $X - x = X - x_1 + x_1 - x$,

$$\int_{x_0}^{X} (X - x) \frac{f(x)}{(x - x_1)}\, dx = (X - x_1) a_1 - J_1$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{(X - x)^2}{2} \frac{f(x)}{(x - x_1)}\, dx = \frac{(X - x_1)^2}{2} a_1 - \frac{X - x_1}{2} J_1 - \tfrac{1}{2} J_2, \text{etc.}$$

On peut donc établir les conditions d'un accord quelconque et en déterminer le centre. Cherchons par exemple, la première directrice de la troisième intégration. On a, si A, B, C sont des coefficients indéterminés,

$$A + B\,a_1 = 0.$$

$$A\,(X - x_0) + B\,[(X - x_1)\,a_1 - J_2] = C.$$

$$\frac{A(X-x_0)^2}{2} + B\left[\frac{(X-x_1)^2}{2}a - \frac{X-x_1}{2}J_1 - \tfrac{1}{2}J_2\right] = C(X - x_1''').$$

En éliminant A, B et C, on trouve une équation qui donne x_1''' (1).

827. Intégrales successives d'un système d'aires concentrées. — La première intégrale est une ligne à gradins, la seconde est un polygone, la troisième est une suite d'arcs paraboliques du second degré que l'on détermine par les tangentes extrêmes, la quatrième est une suite d'arcs paraboliques du troisième degré déterminés par des polygones d'intégration de trois côtés; on continue de même.

On peut se proposer de ne déterminer que les tangentes extrêmes de ces intégrales; on peut alors simplifier les polygones de telle façon qu'à chaque intégration le nombre total de côtés ne soit augmenté que d'une unité. On peut d'abord arriver à ce résultat en remarquant que les différentes paraboles ont entre elles des contacts d'un ordre égal à leur degré moins un; en introduisant les polygones des contacts (545) et en remarquant que ces polygones se déduisent les uns des autres par intégrations, on arrive assez facilement à démontrer que l'on peut supprimer des côtés inutiles et ne conserver qu'un nombre de côtés satis-

(1) On peut considérer une parabole de degré n comme l'intégrale d'ordre $n+1$ de $y = 0$; alors il n'y a plus de paraboles; il n'y a que des accords de systèmes concentrés aux extrémités; les directrices sont déterminées par des équations de la forme $x = \frac{k\,x_0 + (n-k)X}{n}$. On retrouve les directrices équidistantes que l'on connaît.

faisant à la condition énoncée. Mais la théorie des accords, appliquée comme au numéro précédent, nous donnera immédiatement la position des directrices de ces polygones simplifiés.

Soient $x_1, x_2 \ldots x_n$ les abscisses des aires concentrées ou forces. Pour la troisième intégration on formera des accords de deux forces; les directrices tombent au centre de ces accords; on trouve les abscisses

$$x_1 \quad \frac{x_1+x_2}{2} \quad \frac{x_2+x_3}{2} \ldots \frac{x_{n-1}+x_n}{2} \quad x_n .$$

Ce résultat est conforme à l'intégration graphique ordinaire. Pour la quatrième intégration on formera des accords de trois forces; les directrices tombent au centre de ces accords, on trouve

$$x_1 \quad \frac{2x_1+x_2}{3} \quad \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad \frac{x_2+x_3+x_4}{3} \quad \frac{x_{n-1}+2x_n}{3} \quad x_n .$$

Pour la cinquième intégration, on trouve

$$x_1 \quad \frac{3x_1+x_2}{4} \quad \frac{2x_1+x_2+x_3}{4} \quad \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \text{ etc.}$$

Citons des applications de ces polygones simplifiés. On demande de trouver graphiquement n forces en accord parfait. Il faut exprimer que les $n-1$ premières intégrales s'annulent pour x_1 et x_n. La seconde intégrale est un polygone de $n-1$ côtés; en employant la méthode précédente, on trouvera comme polygone de l'intégrale d'ordre $n-1$, un polygone de $(n-1)+(n-3)=2n-4$ côtés. Or à cause des conditions de l'accord, les premiers et derniers côtés se trouvent sur l'axe des x. Pour la troisième intégrale, il y a deux côtés sur l'axe, pour la quatrième il y en a 4; pour l'intégrale d'ordre $n-1$, il y en a : $2(n-3)$. Il n'y a donc que $2n-4-2(n-3)=2$ côtés qui ne se trouvent pas sur l'axe des x; il n'y a donc qu'une ordonnée inconnue. Or cette ordonnée, on peut la prendre arbitrai-

rement, car c'est le rapport des forces que l'on cherche. Il n'y a plus alors qu'à prendre les dérivées successives du polygone ainsi tracé et le problème est résolu sans effort.

On peut demander de déterminer n forces formant un accord parfait avec une surface donnée. Soient x_0, X les limites de l'accord; intégrons à partir de x_0; soient J_1, $J_2 \dots J_n$ les intégrales successives de la surface; I_1, $I_2 \dots I_n$ les intégrales successives des forces, pour l'abscisse X. On doit avoir

$$I_i + J_i = 0, \quad i \leqq n.$$

On tire de là $I_i = -J_i$. Si donc on intègre la surface en changeant son signe, on trouvera les intégrales I_1 à I_n.

Il est alors facile de tracer le polygone simplifié de l'intégrale I_n. Le polygone I_2 a n sommets et $n+1$ côtés; il y a deux côtés de plus que dans l'exemple précédent parce qu'il faut considérer l'intégrale dans les régions $x_1 - x_0$ et $X - x_n$. Le polygone de I_n a alors $2n-1$ côtés. Les $n-1$ premiers côtés sont sur l'axe des x, parce que l'on intègre chaque fois à partir de x_0. Connaissant I_1 I_2 $I_3 \dots I_n$ pour la valeur X, on trouve successivement par intégration le dernier côté de I_2, les deux derniers du polygone de I_3 et finalement les $n-1$ derniers côtés du polygone de I_n. On connaît alors $2(n-1)$ côtés de ce dernier polygone; il ne reste plus qu'un seul côté à tracer; il suffit de joindre deux points connus pour l'obtenir. On trouve alors les forces de l'accord en prenant les dérivées.

La méthode des polygones simplifiés s'applique aussi à l'intégration de systèmes concentrés plus compliqués. Si sur une verticale x_1 on concentre α surfaces, on considérera, dans les formules qui déterminent les directrices, x_1 comme une valeur multiple; en d'autres termes on supposera $x_1 = x_2 = x_3 \dots = x_\alpha$. La démonstration de cette proposition n'est pas difficile; il suffit de reproduire la même démonstration que pour les forces, mais dans la décomposition en accords partiels, on tiendra compte des accords concentrés.

NOTE VIII.

Intégrations approchées.

§ 1. Quadratures par les paraboles.

828. Calcul de l'erreur. — Il s'agit d'évaluer l'aire comprise entre l'axe des x, deux verticales x_0, X et une courbe $F(x)$; on donne n ordonnées $F(x_1)$, $F(x_2)$ ... $F(x_n)$; on remplace la courbe par une parabole d'interpolation et nous nous proposons de calculer l'erreur commise. L'aire exacte est l'intégrale première de la fonction $F(x)$ de x_0 à X; c'est aussi une intégrale d'ordre $n+1$ de $F^{(n)}(x)$; les conditions qui déterminent les constantes d'intégration sont les suivantes :

$$y_0 = 0, \quad y'_1 = F(x_1), \quad y'_2 = F(x_2) \cdots y'_n = F(x_n).$$

On a donc, en prenant $x = X$,

$$Y = \psi(X) + (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^n(z)\, dz.$$

La fonction φ est l'intégrale d'ordre $n+1$ d'un accord d'une force égale à l'unité sur la verticale X, d'une force en x_0 et de n couples en x_1, x_2, x_3, ... x_n. Effectuons la première intégration de l'accord; on trouve une horizontale qui doit avoir -1 pour ordonnée; les couples deviennent des forces. On peut donc aussi considérer la fonction φ comme l'intégrale d'ordre n d'un accord formé par une surface rectangulaire de base $X - x_0$ et de hauteur -1 et par n forces en x_1, x_2 ... x_n. Le premier terme $\psi(X)$ de la valeur de Y est l'aire que l'on obtient en remplaçant la courbe par la parabole d'interpolation, parce que c'est la valeur de Y qui correspond à $F^n(z) = 0$; cette aire est donnée par une formule de quadrature ou une intégration graphique. L'erreur commise est donc

$$\varepsilon = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^n(z)\, dz.$$

On peut trouver la courbe φ par la méthode graphique du numéro 827. On peut aussi trouver φ, en remarquant que les forces de l'accord sont connues. En effet la valeur de $\psi(X)$ s'obtient en appliquant la formule (3) du numéro 815; on trouve ici

$$\psi(X) = \Sigma M_i F(x_i).$$

Donc les moments $M_1, M_2 \dots M_n$ des couples sont précisément les coefficients de la formule de quadrature. Après la première intégration de l'accord, ces moments deviennent des forces; ce sont les forces qui forment avec le rectangle $(X - x_0)$, (-1) un accord dont φ est l'intégrale d'ordre n. Il est facile d'écrire l'équation de chacun des arcs de la courbe φ.

Nous avons vu (823) que la fonction $F(x)$ s'exprime par un développement; en intégrant, on trouve le développement de l'erreur

$$\varepsilon = \Sigma \frac{F^{(n+\mu)}(o)}{1.2.3 \dots (n+\mu)} \int_{x_0}^{X} f(x)(x^\mu + q_1 x^{\mu-1} + \cdots)\, dx. \quad (2)$$

Le reste s'exprime par une intégrale double; mais en le considérant comme l'intégrale de $F^{(n+i)}(x)$, on a aussi

$$R_i = (-1)^{n+i+1} \int_{x_0}^{X} \varphi_i F^{(n+i)}(z)\, dz. \quad (3)$$

Pour obtenir la fonction φ_i, on intègre i fois la fonction φ; mais on introduit des discontinuités sur la verticale o de manière que toutes les intégrales s'annulent aux limites.

Toutes ces propositions peuvent aussi se vérifier directement en reproduisant la seconde démonstration du numéro 815. On part de la formule

$$-\int_{x_0}^{X} I_0 F(z)\, dz = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{X} I_n F(z)\, dz.$$

On suppose que les $I_0\,dz$ comprennent la surface rectangulaire et les forces dont il a été question plus haut; le premier membre est identiquement l'erreur ε; le second membre est l'expression de cette erreur. On raisonne de même pour R_i; il faut alors introduire des discontinuités dans I_{n+1}, I_{n+2} I_{n+i}.

Les accords que nous venons d'introduire sont généralement des accords imparfaits, parce que les conditions qui déterminent l'intégrale Y sont de seconde espèce. L'accord $\varphi^{(n)}$ peut présenter deux changements de signe pour chaque force ou aire concentrée; il peut donc y avoir n changements de signe surabondants. Lorsque l'on donne $F(x_0)$ et $F(X)$, ce nombre se réduit à $n-2$, car à chacune des extrémités, il n'y a qu'un seul changement de signe. Dans l'accord $\varphi_i^{(n+i)}$, il peut y avoir un nouveau changement de signe surabondant, si i est impair. Pour obtenir les limites de l'erreur, il faudra dans chaque cas, examiner si φ et φ_i changent de signe et appliquer, s'il y a lieu, la méthode du numéro 820.

Les formules qui précèdent s'appliquent aussi au cas où l'on donne un certain nombre d'ordonnées et de dérivées de la courbe $F(x)$. Si sur chaque verticale on donne une ordonnée et sa dérivée première, la fonction φ ne change pas de signe, car, sur chaque verticale, les conditions de seconde espèce sont en nombre pair; l'erreur s'exprime alors par le premier terme de son développement, modifié en remplaçant $F_n(o)$ par $F_n(a)$. On arrive aux mêmes conclusions pour R_i, si i est pair.

829. Influence de la symétrie. — Lorsque les verticales sont disposées symétriquement par rapport à la verticale du milieu de l'intervalle $X - x_0$, il y a avantage à choisir ce point milieu comme origine des abscisses; on a alors

$$f(x) = (x^2 - x_1^2)\,(x^2 - x_2^2)\cdots$$

ou

$$f(x) = x^n + p_2 x^{n-2} + p_4 x^{n-4} + \cdots$$

On a aussi

$$\mathrm{E}\frac{x^m}{f(x)} = x^{m-n} + q_2 x^{m-n-2} + q_4 x^{m-n-4} + \cdots$$

Le terme général du développement de l'erreur est de la forme

$$\frac{\mathrm{F}^{(m)}(o)}{1.2.3\ldots m}(x^m + a x^{m-2} + \cdots).$$

Si m est impair, la fonction mise entre parenthèses est une fonction impaire; son intégrale est nulle, entre les limites x_0 et X qui sont alors égales et de signe contraire. Il résulte de là que les dérivées d'ordre pair figurent seules dans le développement et que l'on peut écrire

$$\varepsilon = \Sigma \frac{\mathrm{F}^{2m}(o)}{1.2\ldots 2m}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,\mathrm{E}\left(\frac{x^{2m}}{f(x)}\right) dx. \qquad (4)$$

Les accords $\varphi^{(n)}$ ou $\varphi^{(n+1)}$, sont aussi composés symétriquement; on reconnaît facilement que les intégrales d'ordre pair ou impair sont respectivement des fonctions paires ou impaires. Si n est impair, la fonction φ est impaire, donc elle limite des aires qui se compensent et on peut écrire(800)

$$\varepsilon = (-1)^{n+1}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi\,\mathrm{F}^{(n)}(z)dz = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi_1\,\mathrm{F}^{(n+1)}(z)\,dz.$$

On trouve une erreur du même genre que si l'on avait pris $n+1$ ordonnées.

830. Exemples. — 1° *Rectangle.* On donne (fig. 342) une seule ordonnée F (o) au milieu de l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes supposées inconnues. Soit $\mathrm{X} - x_0 = 2h$; on prend comme valeur approchée de l'aire, le rectangle $2h\,\mathrm{F}(o)$; l'erreur commise est donnée par la formule

$$\varepsilon = (-1)\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi.\,\mathrm{F}'(z)\,dz = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi_1\,\mathrm{F}''(z)\,dz.$$

L'accord est représenté (fig. *b*); la fonction φ est l'ordonnée de la ligne ABDC, intégrale première de cet accord; la fonction φ_1 est l'ordonnée de la ligne EFG, intégrale de la fonction φ.

Le développement de l'erreur s'obtient par la formule (4); on a $f(x) = x$ et par suite

$$E\frac{x^{2m}}{f(x)} = x^{2m-1}$$

d'où

$$\varepsilon = \Sigma \frac{F^{2m}(o)}{123\ldots 2m} \quad \frac{2h^{2m+1}}{2m+1}$$

ou

$$\varepsilon = \frac{h^3}{3} F''(o) + \frac{2h^4}{1.2.3.4} F^{IV}(o) + \cdots$$

On obtient aussi la valeur exacte de ε en faisant l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

$$F'(z) = F'(o) + z\frac{F'(a)}{a}$$

ou

$$F''(z) = F''(a').$$

Cela résulte de ce que φ change de signe sur la verticale o, tandis que φ_1 ne change pas de signe. On a donc

$$\varepsilon = \frac{h^3}{3} \quad \frac{F'(a)}{a} = \frac{h^3}{3} F''(a').$$

On trouve de même que si on prend le développement jusqu'au terme en $F^{2i-2}(o)$, il faut le compléter par un reste donné par l'une ou l'autre des formules

$$R = \frac{F^{2i}(a)}{1.2.3\ldots 2i} \quad \frac{2h^{2i+1}}{2i+1} = \frac{F^{2i+1}(a)}{a1.2.3\ldots 2i} \quad \frac{2h^{2i+1}}{2i+1}.$$

Les valeurs de a ne sont pas les mêmes, ni dans ces formules, ni dans les précédentes; mais cela est si évident que nous avons supprimé les accents et nous le ferons toujours dans la suite.

2° *Trapèze.* On donne (fig. 343) les ordonnées extrêmes de l'arc; la parabole d'interpolation se réduit à la droite MN; on prend comme valeur approchée de l'aire, la surface du trapèze MN*nm*. L'erreur commise est donnée par la formule

$$\varepsilon = (-1)^3 \int_{x_0}^{X} \varphi \, F''(z) \, dz.$$

L'accord est représenté (fig. *b*); l'intégrale première est la droite AB; l'intégrale seconde est la parabole CDE; φ est l'ordonnée de cette parabole.

Remarquons que la surface CDE est précisément le double de la surface EFG que nous avons obtenue (fig. 342, *d*) dans le cas du rectangle. Si $F''(z)$ est constant, le trapèze donne une erreur deux fois plus grande que celle du rectangle; si $F''(z)$ est une courbe régulière ce rapport est peu altéré. Cela provient de ce que, dans la méthode du rectangle, nous avons choisi une ordonnée au milieu de l'intervalle des ordonnées extrêmes.

Nous calculerons le développement de l'erreur par la formule (4); on trouve :

$$f(x) = x^2 - h^2$$

$$E\frac{x^{2i}}{x^2 - h^2} = \frac{x^{2i} - h^{2i}}{x^2 - h^2}$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x) \, E\frac{x^{2i}}{x^2 - h^2} dx = \int_{-h}^{+h} (x^{2i} - h^{2i}) \, dx = \frac{4ih^{2i+1}}{2i+1}$$

$$\varepsilon = \sum_{1}^{\infty} \frac{4ih^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)} F^{2i}(o)$$

$$\varepsilon = \frac{2h^3}{3} F''(o) + \frac{h^5}{3} F^{IV}(o) + \cdots$$

Comme la fonction φ ne change pas de signe, on a :

$$\varepsilon = \frac{2h^3}{3} F''(a).$$

Si on prend le développement jusqu'au terme qui contient $F^{2i-2}(o)$, on ajoute un reste

$$R = \frac{4ih^{2i+1}}{1.2.3...(2i+1)} F^{2i}(a) = \frac{4ih^{2i+1}}{1.2.3...(2i+1)} \frac{F^{2i-1}(a)}{a}.$$

Cela provient de ce que la valeur de R est donnée par l'intégrale

$$R = (-1)^{2i} \int_{x_0}^{X} I_{2i-1} F^{2i-1}(z)\, dz.$$

La fonction I_{2i-1} s'obtient en intégrant $\varphi = I_2$ et en introduisant des discontinuités sur la verticale O; la symétrie se conserve toujours dans ces intégrales; I_{2i-1} est une fonction impaire qui change de signe sur la verticale O; donc on doit faire l'hypothèse :

$$F^{2i-1}(z) = F^{2i-1}(o) + z \frac{F^{2i-1}(a)}{a}.$$

On a aussi

$$R = (-1)^{2i+1} \int_{x_0}^{X} I_{2i} F^{2i}(z)\, dz.$$

La fonction I_{2i} ne change pas de signe; donc on fait l'hypothèse :

$$F^{2i}(z) = F^{2i}(a).$$

3° *Formule de Simpson.* On donne (fig. 344) les ordonnées extrêmes et une ordonnée au milieu de l'intervalle; la parabole d'interpolation est du second degré; on prend comme valeur approchée

$$\frac{h}{3} F(x_0) + \frac{4h}{3} F(o) + \frac{h}{3} F(X).$$

L'erreur est donnée par la formule

$$\varepsilon = (-1)^4 \int_{x_0}^{X} \varphi\, F'''(z)\, dz = (-1)^5 \int_{x_0}^{X} \varphi_4\, F^{IV})\, dz.$$

L'accord est représenté (fig. *b*); les diverses intégrales

de l'accord sont représentées (fig. *c*, *d*, *e*, *f*); la fonction φ est l'ordonnée de la courbe ABCD; la fonction φ_1 est l'ordonnée de la courbe EFG.

On obtient le développement de l'erreur par la formule (4); on trouve successivement :

$$f(x) = (x^2 - h^2)x$$

$$\mathrm{E}\frac{x^{2i}}{f(x)} = \frac{x^{2i} - h^{2i-1}x}{(x^2 - h^2)x}$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\mathrm{E}\frac{x^{2i}}{f(x)}\,dx = \int_{-h}^{+h} (x^{2i} - h^{2i-1}x)\,dx = -\frac{4i-2}{2i+1}h^{2i+1}$$

$$\varepsilon = -\sum_{2}^{\infty} \frac{(4i-2)h^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)}\mathrm{F}^{2i}(o)$$

$$\varepsilon = -\frac{h^5}{20}\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(o) - \frac{h^7}{504}\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(o) - \cdots$$

La fonction φ change de signe sur la verticale *o*; la fonction φ_1 ne change pas de signe; on obtient donc la valeur exacte de l'erreur en faisant l'une ou l'autre des hypothèses

$$\mathrm{F}'''(z) = \mathrm{F}'''(o) + z\frac{\mathrm{F}'''(a)}{a}$$

$$\mathrm{F}'''(z) = \mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(a).$$

On trouve

$$\varepsilon = -\frac{h^5}{20}\,\frac{\mathrm{F}'''(a)}{a} = -\frac{h^5}{20}\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(a).$$

Si on prend le développement de l'erreur jusqu'au terme qui contient $\mathrm{F}^{2i-2}(o)$, le reste s'exprime par

$$\mathrm{R} = -\frac{(4i-2)h^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)}\,\frac{\mathrm{F}^{2i-1}(a)}{a} = -\frac{(4i-2)h^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)}\mathrm{F}^{2i}(a).$$

4° *Parabole du troisième degré.* On donne (fig. 345) les ordonnées extrêmes et deux ordonnées intermédiaires; ces quatre ordonnées sont également espacées. La parabole

d'interpolation est du troisième degré; on prend comme valeur approchée de l'aire (21)

$$\frac{h}{4}M+\frac{3h}{4}N+\frac{3h}{4}P+\frac{h}{4}Q.$$

L'erreur est donnée par la formule

$$\varepsilon=(-1)^5\int_{x_0}^{X}\varphi.\,F^{IV}(z)\,dz.$$

L'accord est représenté (fig. *b*); ses diverses intégrales sont représentées (fig. *c*, *d*, *e*, *f*). Nous avons vu que l'accord présente $n-2=2$ changements de signe surabondants; on trouve en effet, 6 changements de signe pour un accord du cinquième degré. Mais à la seconde intégration, on obtient la courbe ABCDE; on trouve par l'analyse que le point C est sur l'axe des x; les deux changements de signe surabondants ont donc disparu et la fonction φ ne change pas de signe; elle est représentée par la courbe GHK

Le développement de l'erreur s'obtient par la formule (4); on trouve successivement

$$f(x)=(x^2-h^2)\left(x^2-\frac{h^2}{9}\right)$$

$$E\frac{x^{2i}}{f(x)}=E\frac{x^{2i}-h^{2i}}{(x^2-h^2)\left(x^2-\frac{h^2}{9}\right)}=\frac{\dfrac{x^{2i}-h^{2i}}{x^2-h^2}-\dfrac{\left(\frac{h}{3}\right)^{2i}-h^{2i}}{\frac{h^2}{9}-h^2}}{x^2-\frac{h^2}{9}}.$$

Remarquons que pour former la partie entière que nous représentons par E, on peut ajouter au numérateur des fonctions entières de degré moindre que le degré du dénominateur; on introduit ces quantités de manière à rendre la division possible. Nous avons introduit $-h^{2i}$ pour pou-

voir diviser par $x^2 - h^2$; l'autre terme a été introduit pour que $\pm\frac{h}{3}$ devienne racine du numérateur.

On a ensuite

$$f(x)\,\mathrm{E}\frac{x^{2i}}{f(x)} = x^{2i} - h^{2i} - (x^2 - h^2)h^{2i-2}\frac{1-(\frac{1}{3})^{2i}}{1-(\frac{1}{3})^2}$$

et après quelques calculs

$$\varepsilon = \sum_2^{\infty}\frac{h^{2i+1}\,\mathrm{F}^{2i}(o)}{1.2.3\ldots 2i}\left[-\frac{4i}{2i+1}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}2i\right)\right]$$

$$\varepsilon = -\frac{2}{405}h^5\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}o + \cdots$$

On trouve le reste du développement en remplaçant $\mathrm{F}^{2i}(o)$ par $\mathrm{F}^{2i}(a)$ ou $\frac{1}{a}\mathrm{F}^{2i-1}(a)$.

On peut aussi assimiler la courbe à une parabole du troisième degré, lorsqu'on connaît les extrémités de l'arc et les tangentes extrêmes. On a toujours

$$\varepsilon = (-1)^n\int_{x_0}^{X}\varphi\,\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(z)\,dz.$$

On voit facilement que l'accord est précisément l'état de sollicitation d'une poutre droite prismatique encastrée à ses extrémités, supportant une charge uniforme égale à l'unité; φ est l'ordonnée de la courbe élastique; on a (804)

$$\varphi = -\frac{(x^2-1)^2}{1.2.3.4}.$$

On en déduit

$$\varepsilon = \frac{2h^5}{45}\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(a).$$

5° *Parabole du quatrième degré.* — On donne (fig. 346) les ordonnées extrêmes et trois ordonnées intermédiaires; toutes ces ordonnées sont également espacées. On rem-

place la courbe par une parabole du quatrième degré; on trouve comme valeur approchée de l'aire

$$\frac{7h}{45}M+\frac{32h}{45}N+\frac{12h}{45}P+\frac{7h}{45}R.$$

L'erreur est donnée par la formule

$$\varepsilon=(-1)^6\int_{x_0}^{X}\varphi\,F^{v}(z)\,dz=(-1)^7\int_{x_0}^{X}\varphi_1\,F^{vi}(z)\,dz.$$

L'accord est représenté (fig *b*) et ses intégrales successives (fig. *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*). L'accord présente $n-2=3$ changements de signe surabondants; mais à la seconde intégration, deux changements de signe surabondants disparaissent; on le reconnaît en calculant $I_2(o)$; on trouve

$$I_2(o)=-\frac{h^2}{2}+\frac{7}{45}h^2+\frac{32}{45}h.\frac{h}{2}=\frac{h^2}{90}.$$

La fonction φ présente donc un seul changement de signe; c'est une fonction impaire, ce changement de signe est au milieu de l'intervalle. La fonction φ_1 ne change pas de signe.

On obtient le développement de l'erreur par la formule (4); on trouve successivement :

$$f(x)=x(x^2-h^2)\left(x^2-\frac{h^2}{4}\right)$$

$$E\frac{x^{2i}}{f(x)}=E\frac{(x^{2i-1}-h^{2i-1})\,x}{f(x)}=\frac{x^{2i}-h^{2i-1}x-(x^2-h^2)\frac{4}{3}h^{2i-3}x\left(1-\frac{1}{2^{2i-1}}\right)}{f(x)}$$

$$\int_{x_0}^{X}f(x)\,E\frac{x^{2i}}{fx}dx=\left[-\frac{4i-2}{2i+1}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2i-1}}\right)\right]h^{2i+1}.$$

$$\varepsilon=\sum_{3}^{\infty}\frac{h^{2i+1}\,F^{2i}(o)}{1.2.3\ldots 2i}\left[-\frac{4i-2}{2i+1}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2i-1}}\right)\right]$$

$$\varepsilon=-\frac{263}{336}\frac{h^7}{720}F^{vi}(o)+\cdots$$

On obtient exactement la valeur de l'erreur par l'une ou l'autre des hypothèses suivantes

$$F^{v}(z) = F^{v}(o) + z\frac{F^{v}(a)}{a}.$$

$$F^{vi}(z) = F^{vi}(a).$$

On trouve

$$\varepsilon = -\frac{263}{336}\frac{h^7}{720}\frac{F^{v}(a)}{a} = -\frac{263}{336}\frac{h^7}{720}F^{vi}(a).$$

On trouve de même la valeur du reste qui complète le développement limité à un terme quelconque.

6° *Parabole du cinquième degré.* On donne 6 ordonnées équidistantes; deux sont à l'extrémité de l'arc; on remplace la courbe par une parabole du cinquième degré. L'erreur est donnée par la formule

$$\varepsilon = (-1)^7 \int_{x_0}^{X} \varphi\, F^{vi}(z)\, dz.$$

Montrons, par cet exemple, comment on exprime la fonction φ par l'analyse. Les forces de l'accord sont les coefficients de la formule de quadrature; ce sont les aires des paraboles partielles pour des ordonnées égales à l'unité. On a (826) pour l'une des forces

$$\alpha_i = \int_{x_0}^{X} \frac{fx}{(x - x_i)f'(x_i)}\, dx.$$

Posons

$$f(x) = (x^2 - x_i^2)\,\chi(x).$$

Le nombre d'ordonnées est supposé pair; il y a symétrie; on trouve

$$\alpha_i = \frac{1}{\chi(x_i)} \int_0^h \chi(x)\, dx.$$

Si le nombre d'ordonnées était pair, on appliquerait la même formule, mais en comptant l'ordonnée milieu pour deux, de manière que $f(x)$ et $\chi(x)$ soient toujours des fonctions paires.

Connaissant les forces de l'accord on trouve aisément la fonction φ. Si nous prenons l'origine des z au point x_0, on trouve ici

$$\varphi = -z^{\cdot 6} + \frac{19}{144} h z^{\cdot 5} + \frac{75}{144} h \left(z - \frac{2h}{5}\right)^{\cdot 5} + \frac{50}{144} h \left(z - \frac{4h}{5}\right)^{\cdot 5}.$$

On prend les deux premiers termes pour le premier intervalle de o à $\frac{2}{5} h$; on ajoute chaque fois un terme quand on rencontre une ordonnée. La courbe φ est symétrique; il suffit d'avoir l'équation d'une moitié de la courbe.

Si on prend les deux premiers termes, on trouve une racine

$$z = \frac{114}{144} h.$$

Cette racine ne convient pas; elle est en dehors de l'intervalle. On reconnaît que par suite de l'influence des autres termes, la fonction φ ne change pas de signe.

On peut donc faire l'hypothèse $F^{vi}(z) = F^{vi}(a)$; on a alors à cause du développement

$$\varepsilon = \frac{F^{vi}(a)}{1.2.3.4.5.6} \int_{x_0}^{X} f(x) dx$$

$$f(x) = (x^2 - h^2)\left(x^2 - \frac{9}{25} h^2\right)\left(x^2 - \frac{h^2}{25}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{11}{21} \frac{F^{vi}(a)}{28125}.$$

7° *Paraboles diverses.* — Dans les exemples qui précèdent nous avons trouvé les deux formes suivantes du reste

$$AF^{(n)}(a) \quad B\frac{F^n(a)}{a}$$

si n est le nombre d'ordonnées; la première forme s'applique au cas où n est pair, la seconde au cas où n est

impair. Il faudrait bien se garder de supposer qu'il en est toujours ainsi. Il serait facile de modifier les espacements des ordonnées de telle façon que les n ou $n - 2$ changements de signe surabondants subsistent dans la fonction φ, même pour les paraboles de degré inférieur. Tout porte à croire que si nous avions considéré des paraboles de degré plus élevé, tout en prenant des ordonnées équidistantes, nous aurions trouvé qu'un certain nombre de changements de signes persistent dans la dernière intégrale de l'accord et qu'il y a lieu d'appliquer la méthode du numéro 820.

Remarquons enfin que l'on a aussi

$$\varepsilon = (-1)^2 \int_{x_0}^{X} I_1 F'(z)\, dz = (-1)^3 \int_{x_0}^{X} I_2 F''(z)\, dz, \text{ etc.}$$

On pourrait trouver diverses formes de l'erreur; mais il faut remarquer que les dérivées d'ordre inférieur à n ne sont pas indépendantes des ordonnées connues de la courbe $F(x)$.

8° *Comparaison.* On connaît n ordonnées de la courbe $F(x)$; on peut remplacer la courbe par une parabole unique ou bien décomposer l'arc en parties et remplacer la courbe par une suite d'arcs paraboliques ou même par un polygone inscrit. Quel est le procédé qui donne le plus d'exactitude?

Si les dérivées successives de la fonction $F(x)$ ne prennent pas des valeurs exagérées et si on applique les formules précédentes en calculant les diverses valeurs de h, on trouve que l'erreur décroit très-rapidement lorsqu'on adopte des paraboles de degré de plus en plus élevé. Si donc la courbe est analytique et si les dérivées varient régulièrement, il y a une probabilité très-grande d'avoir le minimum de l'erreur en prenant une parabole unique.

On arrive aux mêmes conséquences en utilisant les intégrales des accords. Mettons toutes les erreurs sous la forme

$$\varepsilon = (-1)^3 \int_{x_0}^{X} I_2\, F''(z)\, dz.$$

Si on emploie la méthode des trapèzes, la courbe I_2 se compose d'arcs paraboliques identiques à l'arc CDE (fig. 343, *d*); il faut tracer un arc de cette forme pour chaque intervalle. Si on applique l'interpolation parabolique, on trouve pour I_2 des courbes analogues à celles qui sont représentées (fig. 344, 345, 346, fig. *d*); ce sont toujours des arcs paraboliques du second degré; la dérivée seconde est toujours égale à -1; mais ces arcs déterminent des accords de degré de plus en plus élevé. Si la courbe $F''(z)$ est plus ou moins régulière, il se produira des compensations dans les $I_2 F''(z)\,dz$; ces compensations sont peu probables dans la méthode des trapèzes. Supposons par exemple qu'il y ait cinq ordonnées et que la courbe $F''(z)$ s'approche grossièrement d'une parabole du second degré; soit

$$F''(z) = mz^2 + nz + q + R(z).$$

Si on remplace la courbe $F(z)$ par une parabole du quatrième degré, l'erreur devient

$$\varepsilon = (-1)^5 \int_{x_0}^{X} I_2 R(z)\,dz.$$

Il en serait de même si la courbe $F''(z)$ s'approchait d'une parabole du troisième degré. Il est évident d'après cela que l'erreur sera généralement beaucoup plus petite que si on avait employé la méthode des trapèzes. Il faut remarquer cependant que si ces conclusions sont très probables, elles ne sont pas absolument vraies. Si la courbe $F''(z)$ changeait de signe quatre fois et précisement aux mêmes points que la fonction I_2 (fig. 346, *d*), l'erreur ε deviendrait très grande en utilisant la parabole du quatrième degré. Si on applique la méthode des trapèzes, I_2 ne change pas de signe; il peut se faire qu'il y ait des compensations dans les $I_2 F''(z)\,dz$; mais c'est là une hypothèse peu probable. Il est presque certain que si la courbe $F(z)$ présentait toutes ces inflexions, l'opérateur s'en apercevrait et cher-

cherait la solution du problème, dans une assimilation plus rationnelle. On raisonnerait de même s'il s'agissait de comparer la méthode de Simpson aux paraboles de degré supérieur; on utiliserait

$$\varepsilon = (-1)^4 \int I_3 F'''(z)\, dz.$$

Il y a des cas où l'assimilation à une parabole doit être rejetée; si la courbe présente des rebroussements, des éléments verticaux, une asymptote, etc., on doit opérer comme nous l'indiquerons plus loin.

S'il s'agit d'une courbe vulgaire ou d'une courbe analytique dont les ordonnées sont entachées de certaines erreurs, il est inutile et même dangereux d'employer des paraboles de degré élevé. On peut alors affirmer avec une certitude presque absolue que la courbe présente des discontinuités cachées dans les dérivées supérieures; car s'il n'y en avait pas, la fonction serait développable par la formule de Taylor et connaissant un arc infiniment petit de la courbe, on devrait pouvoir en déduire toute la courbe ou à peu près. Ainsi une courbe vulgaire peut être bien raccordée et présenter cependant de faibles discontinuités dans la dérivée seconde; les discontinuités de la dérivée troisième sont impossibles à constater et à plus forte raison les discontinuités des autres dérivées. Or dans ce cas, il est impossible de représenter par des courbes les dérivées supérieures de la fonction, et il ne reste plus rien de la comparaison précédente. Il faut se borner à prendre des paraboles du second degré, ou du troisième s'il y a une inflexion constatée dans la courbe.

§ 2. — Limites absolues de l'erreur.

831. Principe. — Il est impossible d'assigner une limite certaine à l'erreur commise par une quadrature approchée, si on n'apporte pas quelque restriction à la variation de

l'une ou l'autre dérivée. S'il y a au contraire une pareille restriction, on peut calculer la plus grande et la plus petite de toutes les surfaces que l'on peut obtenir; soient M et m ces deux limites, en prenant comme valeur approchée de l'aire

$$\frac{M+m}{2},$$

l'erreur est certainement plus petite que

$$\frac{M-m}{2}.$$

Nous n'approuvons pas beaucoup cette manière de raisonner; les limites M et m s'obtiennent en faisant des hypothèses extravagantes; on diminue l'erreur que l'on commettrait dans des cas tout-à-fait improbables pour augmenter presque toujours l'erreur réelle. Néanmoins le calcul des limites M et m peut être utile et il donne lieu à quelques problèmes intéressants.

Généralement on se borne à calculer une surface trop grande ou très petite, sans examiner si ces valeurs extrêmes sont possibles; nous croyons que ce qu'il faut chercher, ce sont les limites de la surface dans le sens mathématique du mot.

832. Dérivée qui ne change pas de signe. — Si dans chaque intervalle compris entre deux ordonnées, la dérivée première ne change pas de signe, on obtiendra les deux limites en remplaçant la courbe par deux lignes à gradins dont les sommets sont les points donnés. La moyenne des deux limites s'obtient en employant la méthode des trapèzes.

833. Dérivée seconde qui ne change pas de signe. — Supposons pour fixer les idées que la dérivée seconde soit négative; la courbe est convexe vers le haut. On obtient la limite inférieure de l'aire en menant le polygone inscrit dans la courbe; cela revient à employer la méthode des trapèzes. On obtiendra la limite supérieure en menant un

polygone convexe vers le haut, dont les côtés passent par les points connus de la courbe, ce polygone étant tracé de manière à obtenir le maximum de surface. Il est évident, en effet, que toute courbe passant par les points donnés, limite une aire plus petite que celle que l'on obtient par le polygone circonscrit à la courbe; cette dernière surface est plus petite ou égale à sa valeur maxima; d'autre part, on obtient ainsi une véritable limite, car il serait possible d'imaginer une courbe continue se rapprochant aussi près que l'on veut du polygone de plus grande surface.

Soit (fig. 347) C'D' un côté du polygone circonscrit; faisons tourner ce côté autour du point D; on démontre facilement que la surface du triangle C'TD' passe par un minimum, lorsque C'D = DD'; on obtient donc le polygone de plus grande surface en faisant pivoter tous les côtés jusqu'au moment où la condition précédente est satisfaite partout; on aura cependant égard à la condition que le polygone doit rester convexe vers le haut. Nous allons donner quelques exemples :

1° Soit (fig. 347) ABCDEFGH le polygone inscrit; il s'agit d'y circonscrire un polygone de surface maxima. Au point A, nous prendrons AA' comme premier côté; menons par B, un second côté; si, comme cela se présente sur la figure, le premier intervalle *ab* est égal ou plus grand que le second intervalle *bc*, on fera tourner le second côté jusqu'au moment où il coïncidera avec BC, et on sera forcé d'arrêter la rotation en ce moment. Pour la même raison, on prendra à l'autre extrémité les côtés HH' et H'GF. Il s'agit alors de mener le polygone C'D'G' de manière à réaliser les conditions C'D = DD', D'E = EG'. Pour y arriver, projetons les polygones sur une droite C*f* au moyen de lignes projetantes parallèles à la droite A'C'; toutes les projections sont connues à cause des conditions *cd* = *dd'*, *d'e* = *ee'*. On mène alors les lignes projetantes; on trouve le point E' et on trace le polygone.

Lorsque l'on opère graphiquement, on est amené à tracer comme lignes intégrales relatives aux deux limites, deux polygones à côtés parallèles.

2° Nous avons en même temps résolu le problème suivant : on donne les points C,D,E,F de la courbe et les limites CC′ et FF′ que les tangentes extrêmes ne peuvent dépasser; on demande la limite supérieure de la surface CDF$f'c$. Cette limite est CC′D′E′F$f'c$.

3° Dans la figure 348, le premier intervalle ab est plus petit que le second. On porte $ab = bb'$, $b'c = cc'$, $c'd = dd'$; supposons que $d'e$ soit plus petit que ef. Si on menait un côté D′F″, on serait amené à le faire tourner jusqu'au moment où il coïnciderait avec DE; on obtient donc en A′B′C′F′ le polygone de surface maxima; on le construit en partant du point C′.

4° Supposons dans la figure 348 que l'ordonnée extrême au lieu d'être en Ff, vienne en Gg de telle façon que $d'e = eg$. Alors on peut partir d'un point A′ pris arbitrairement dans une certaine mesure; on obtient immédiatement un polygone qui réalise toutes les conditions du maximum de surface. On peut tracer une infinité de ces polygones, mais on voit facilement qu'ils donnent tous une même surface. Si nous reprenons la méthode de Poncelet (44), nous voyons que les espacements des ordonnées sont précisément choisis de manière à se trouver dans ce cas. Généralement on explique la méthode de Poncelet en menant des tangentes à la courbe inconnue et en formant un polygone discontinu; ce polygone n'est généralement pas convexe; c'est une solution impossible; mais il se fait que cette solution donne précisément la même surface que le polygone possible de surface maxima.

5° Il serait très-long d'examiner tous les cas qui peuvent se présenter dans la recherche de la limite supérieure de la surface. Même avec les espacements d'ordonnées que nous avons signalés précédemment, on peut être amené à

modifier les constructions, si ces constructions fournissent des polygones qui ne sont pas complètement convexes. Il faut alors supprimer les concavités en plaçant certains côtés en ligne droite, ou en brisant les côtés sur les points donnés. Il serait aisé de donner des exemples où la méthode de Poncelet donne une surface trop grande comme limite supérieure.

834. Dérivée d'ordre n — 1 qui ne change pas de signe. — On donne n ordonnées de la courbe. Nous mettrons la surface sous la forme

$$S = A + (-1)^n \int_{x_0}^{X} \varphi' F^{(n-1)}(z)\, dz.$$

Nous désignons par A l'aire fournie par l'interpolation parabolique; il s'agit de calculer la plus grande et la plus petite valeur de l'intégrale.

Nous savons déjà que $F^{(n-1)}(z)$ ne change pas de signe; mais il y a une autre condition à établir : l'intégrale d'ordre n — 1 de cette fonction doit passer par n points connus. Si nous déterminons les constantes d'intégration par les n — 1 premiers points, nous devons exprimer que la courbe $F(x)$ passe encore par le dernier point. Cela nous donne

$$F(x_n) = \psi_{n-1}(x_n) + (-1)^{n-1} \int_{x_0}^{X} u\, F^{(n-1)}(z)\, dz. \qquad (4)$$

La fonction u est l'intégrale d'un accord parfait formé d'une force égale à l'unité sur la verticale x_n et de n — 1 forces sur les autres verticales. On est ramené à chercher la plus grande et la plus petite valeur de S sachant que l'intégrale des $(u\, F^{(n-1)}(z)\, dz)$ est constante. Posons

$$dv = u\, F^{(n-1)}(z)\, dz, \qquad v_1 = \int_{x_0}^{X} dv.$$

La valeur de S devient

$$S = A + (-1)^n \int_{x_0}^{X} \frac{\varphi'}{u}\, dv.$$

Déterminons la plus grande et la plus petite des valeurs du rapport $\varphi' : u$; soient c, c' les verticales où ces valeurs limites se produisent. Comme l'intégrale des dv est une constante, on obtiendra les limites de S en supposant que tous les dv se produisent sur la verticale c ou sur la verticale c'; cela revient à supposer que la courbe $F^{(n-1)}(z)$ coïncide avec l'axe des z sauf sur les verticales c ou c' où elle limite une aire concentrée. Dans ce cas la courbe $F^{(n-2)}(z)$ est formée de deux horizontales séparées par une discontinuité située sur la verticale c ou c'; la courbe $F(z)$ est formée de deux arcs paraboliques de degré $n-2$ ayant sur la verticale c ou c' un contact d'ordre $n-3$. Nous trouverons plus loin des exemples où ces verticales tombent aux extrémités de l'arc; on obtient alors les limites de la surface par une parabole unique de degré $n-2$ passant par les n premiers ou derniers points.

Soient μ et $-\mu'$ les valeurs extrêmes de $(-1)^n \frac{\varphi'}{u}$; on trouve pour les deux limites de la surface

$$M = A + \mu v^1,$$
$$m = A - \mu' v^1$$

d'où
$$\frac{M - A}{A - m} = \frac{\mu}{\mu'}.$$

De là on déduit ce théorème : le rapport des différences M—A et m—A est indépendant des ordonnées de la courbe; il ne dépend que des rapports des abscisses.

Exemple : 1° *n pair*. Nous supposons les ordonnées placées symétriquement; alors la fonction φ' est une fonction impaire; u est toujours une fonction paire, parce qu'il y a symétrie. Les deux valeurs μ, μ' sont égales; on a donc

$$M - A = A - m$$
$$A = \frac{M + m}{2}.$$

Non seulement la parabole unique d'interpolation est la plus convenable au point de vue de l'erreur probable; c'est aussi cette parabole qui réduit le plus les erreurs limites, lorsqu'on admet que la fonction $F^{(n-1)}(x)$ varie de la manière la plus extravagante, tout en restant de même signe.

Appliquons ces résultats au cas où l'on donne quatre ordonnées équidistantes (fig. 345). La courbe $\frac{\varphi'}{u}$ est représentée (fig. *g*); dans le premier et le second dernier intervalle, on trouve deux droites dont les équations s'obtiennent facilement; les verticales *c*, *c'* sont situées aux extrémités de l'arc. Les limites de la surface s'obtiennent successivement en menant une parabole du second degré par les trois premiers points, et par les trois derniers. En prenant la moyenne de ces deux surfaces limites, on retrouve la surface obtenue par la parabole du troisième degré. On peut vérifier ces propriétés par l'analyse; on y arrive très-rapidement en représentant la différence qui existe entre les ordonnées de la parabole du troisième degré et celles des deux autres paraboles; on trouve deux paraboles du troisième degré identiques, l'une se déduit de l'autre par un déplacement parallèle à l'axe des *x*, les aires sont égales et de signe contraire. On a aussi MM' = QQ', si M' est sur la parabole du second degré passant par les trois derniers points et Q' sur la parabole du second degré passant par les trois premiers points.

Dans tous les cas où l'on donne les ordonnées extrêmes, on trouve deux limites de $\frac{\varphi'}{u}$ aux extrémités; toutefois si le nombre d'ordonnées est considérable, il y a d'autres maxima et minima à considérer. Lorsque l'on ne donne pas les ordonnées extrêmes, les verticales *c* et *c'* ne sont jamais aux extrémités.

2° *n impair*. Si les ordonnées sont placées symétriquement la fonction $\frac{\varphi'}{u}$ est paire; si on trouve une limite μ sur

une verticale c, on trouvera une même limite sur la verticale $-c$; mais $-\mu'$ est la limite d'un autre signe; on n'a plus $\mu = \mu'$; le rapport $M - A : m - A$ est un rapport numérique à calculer dans chaque cas.

Supposons que l'on donne cinq ordonnées équidistantes (fig. 346); deux ordonnées sont aux extrémités de l'arc. La courbe $\frac{\varphi'}{u}$ est représentée (fig. *i*); dans le premier intervalle et le dernier, on trouve deux droites symétriquement placées. On obtient une première limite de $\frac{\varphi'}{u}$ à l'une ou à l'autre extrémité; la limite de signe opposé s'obtient sur la verticale o. On obtiendra donc une limite de la surface, en menant une parabole du troisième degré par les quatre premiers points; on obtiendra la même limite en menant cette parabole par les quatre derniers points; enfin on peut opérer les concentrations partiellement aux deux extrémités, cela conduit à mener une parabole du troisième degré quelconque par les trois points intermédiaires; ce qu'il y a de plus simple c'est de mener une parabole du second degré par ces trois points. On vérifie très facilement que toutes ces hypothèses donnent la même surface, en représentant comme précédemment les différences entre les ordonnées de ces paraboles et on découvre en même temps des petites propriétés de ces différences. Pour obtenir une seconde limite de la surface, on mène deux arcs paraboliques du troisième degré ayant au point P un contact du second ordre; le premier passe par les trois premiers points, le second par les trois derniers. On trouve

$$\frac{M - A}{A - m} = \frac{28}{17}.$$

Lorsque le nombre d'ordonnées est plus considérable, il y a d'autres maxima et minima de $\frac{\varphi_1}{u}$ à considérer. Quand

on ne donne pas les ordonnées extrêmes de l'arc, les verticales c et c' ne sont jamais aux extrémités.

§ 3. Facteurs obligés.

825. Singularités. — Lorsque la courbe que l'on veut intégrer présente des singularités, il faut évidemment l'assimiler à une courbe intégrale qui ait les mêmes singularités. Supposons par exemple que la courbe présente une asymptote verticale et que l'on veuille construire la courbe intégrale dans les environs de cette asymptote. Prenons cette asymptote comme axe des y; on pourra généralement mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$y = \frac{a + bx + cx^2 + \cdots}{x^k}$$

L'intégrale reste finie si k est plus petit que 1. Proposons nous d'intégrer de 0 à $2h$, en utilisant une seule ordonnée

$$y_1 = \frac{a + bh + ch^2 + \cdots}{h^k}$$

Nous prendrons approximativement

$$y = \frac{y_1 h^k}{x^k}.$$

L'intégrale cherchée a pour valeur

$$\int_0^{2h} y\,dx = y_1 h \frac{2^{1-k}}{1-k}.$$

Soit $k = \frac{1}{2}$, on trouve.

$$\int_0^{2h} y\,dx = y_1 2h\sqrt{2}.$$

Il suffit d'intégrer un rectangle de hauteur y_1 et de base $2h\sqrt{2}$. On peut généraliser et perfectionner ce procédé de la manière suivante.

826. Facteur obligé. — La courbe que l'on veut intégrer n'est pas assimilable à une parabole; mais on

pourra presque toujours mettre son ordonnée sous la forme $V\,F(x)$, V étant une fonction analytique dont on sait trouver les intégrales et qui épouse les singularités de la courbe, $F(x)$ étant une fonction régulière et assimilable à une fonction entière. Donnons-nous $F(x_1), F(x_2) \ldots F(x_n)$; on a (822)

$$F(x) = \Sigma \frac{F(x_i) f(x)}{(x - x_i) f'(x_i)} + \sum_n^\infty f(x)\, E \frac{x^m}{f(x)} \quad \frac{F^m(o)}{1.2.3 \ldots m}$$

$$\int_{x_0}^{X} VF(x)dx = A + \varepsilon \tag{1}$$

$$A = \Sigma \alpha_i F(x_i) = \Sigma \beta_i V_i F(x_i) \tag{2}$$

$$\alpha_i = \beta_i V_i = \int_{x_0}^{X} \frac{V f(x) dx}{(x - x_i) f'(x_i)} \tag{3}$$

$$\varepsilon = \sum_n^\infty \frac{F^m(o)}{1.2.3 \ldots m} \int_{x_0}^{X} V f(x) E \frac{x^m}{f(x)}\, dx. \tag{4}$$

Toutes les intégrales qui figurent dans ces formules peuvent s'exprimer au moyen de

$$\int_{x_0}^{X} x^m V dx \quad \text{ou} \quad \int_{x_0}^{X} (X - x)^m V dx.$$

On peut les calculer exactement par hypothèse. La formule (2) donne la valeur approchée de l'aire; si on opère graphiquement, on intègre des rectangles $\alpha_i \times F(x_i)$ ou $\beta_i \times V_i F(x_i)$ selon que l'on trace la courbe $F(x)$ ou la courbe $VF(x)$. La formule (4) donne le développement de l'erreur.

837. Calcul de l'erreur. — Formons un accord analogue à celui que nous avons considéré dans la méthode ordinaire de quadrature; mais au lieu de prendre une surface rectangulaire de hauteur — 1, prenons la surface limitée par la courbe — V; soit I_0 l'ordonnée de cet accord, y compris les aires $M_1, M_2, M_3 \ldots M_n$ concentrées sur les verticales $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ On a :

$$-\int_{x_0}^{X} I_0 F(z)\, dz = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{X} I_n F^n(z)\, dz.$$

Le premier membre se calcule aisément; en prenant $\varphi = I_n$, il vient :

$$\int_{x_0}^{X} VF(x)\,dx - \Sigma M_i F(x_i) = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^{(n)}(z)\,dz.$$

Si on suppose $F^{(n)}(z) = 0$, on trouve

$$A = \Sigma M_i F(x_i).$$

Donc les forces M_i sont les coefficients α_i de la formule de quadrature; l'erreur ε devient

$$\varepsilon = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^{(n)}(z)\,dz. \qquad (5)$$

Si on donne $F^n(o)$ à $F^{m-1}(o)$, on forme un accord de degré $m+1$ en introduisant dans I_0 un accord de degré n formé de m surfaces concentrées sur la verticale o[1]; cela revient à introduire dans les intégrales de φ des discontinuités qui portent le degré de l'accord de $n+1$ à $m+1$. On a alors

$$-\int_{x_0}^{X} I_0 F(z)\,dz = (-1)^{m+1} \int_{x_0}^{X} I_m F^m(z)\,dz$$

ou bien

$$\int_{x_0}^{X} VF(x)dx - \Sigma M_i F(x_i) - (-1)^n TF^n(o) - \cdots = (-1)^{m+1} \int_{x_0}^{X} 1_m F^{(m)}(z)\,dz.$$

Si on applique la formule pour $F^{(m)}(z) = 0$, on trouve que les termes du développement de l'erreur sont de la forme $(-1)^n T F^n(o)$; le reste qu'il faut ajouter quand on va jusqu'au terme qui contient $F^{(m-1)}(o)$ est :

$$R = (-1)^{m+1} \int_{x_0}^{X} I_m F^{(m)}(z)\,dz \qquad (5)$$

Si les ordonnées et la fonction V sont symétriques par

(1) Si on éprouvait quelque embarras à concevoir les zigzags concentrés de la courbe I_0, on pourrait arriver au but en prenant $I_0 = -V$, et en intégrant par parties; on tiendra compte des discontinuités de I_1, I_{n+1}, etc., en modifiant convenablement la formule d'intégration par parties.

rapport à la verticale du milieu de l'intervalle $X - x_0$, les dérivées paires sont les seules qui subsistent dans le développement ; les intégrales d'ordre pair de l'accord sont des fonctions paires ; les autres intégrales sont des fonctions impaires. Si n est impair, on a aussi :

$$\varepsilon = (-1)^{n+2} \int_{x_0}^{X} I_{n+1} F^{(n+1)}(z)\, dz.$$

Les discontinuités sur la verticale O n'existent que dans les intégrales impaires. Le nombre de changements de signe surabondants est toujours n, ou $n-2$, si V ne change pas de signe ; sinon il faut y ajouter les changements de signe de V.

§ 4. Intégrations successives.

338. On remplace la courbe par une parabole d'interpolation ; on effectue plusieurs intégrations successives et on demande l'erreur commise en un point quelconque de l'une des intégrales. On obtient le développement de l'erreur en intégrant plusieurs fois de x_0 à x, l'erreur commise sur $F(x)$ par l'interpolation ; il n'y a aucune difficulté. On obtiendra ε ou R sous forme d'aires en les considérant comme des intégrales de $F^n(x)$ ou $F^m(x)$. On arrive plus vite au but en mettant l'intégrale cherchée sous la forme

$$U = T + \int_{x_0}^{X} \frac{(x-z)^2}{1.2} F(z)\, dz.$$

Nous supposons le cas d'une intégrale troisième ; T est le terme des constantes ; il ne donne lieu à aucune erreur. Nous écrirons :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^2}{1.2} F(z)\, dz = \int_{x_0}^{X} VF(z)\, dz$$

de x_0 à x

$$V(z) = \frac{(x-z)^2}{1.2}$$

de x à X

$$V(z) = 0.$$

Nous considérerons V comme un facteur obligé; et nous aurons :

$$\varepsilon = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{X} I_n F^n(z)\, dz$$

$$R = (-1)^{m+1} \int_{x_0}^{X} I_m F^m(z)\, dz.$$

L'accord I_0 est formé d'une surface limitée par une parabole et par n forces. On arrive au même résultat par la méthode directe; I_0 est l'intégrale troisième de l'accord primitif formé de forces et de couples.

§ V. Méthode de Gauss.

339. Abscisses de Gauss. — Lorsqu'on remplace la courbe par une parabole d'interpolation de degré $n-1$, l'erreur commise dans l'évaluation de la surface s'exprime par un développement qui contient les dérivées $F^n(o)$, $F^{n+1}(o)$... On peut profiter de l'indétermination des abscisses, ou ce qui est la même chose de l'indétermination de la fonction $f(x)$, pour exprimer que les n premiers termes du développement s'évanouissent; les équations de condition sont de la forme

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, \theta_{n-1}\, dx = 0,$$

θ_{n-1} désignant une fonction entière de degré 0 à $n-1$; on satisfait à toutes ces conditions en prenant pour $f(x)$ l'ordonnée de la parabole harmonique.

On peut arriver au même résultat sans invoquer la forme du développement de l'erreur. Il s'agit de placer les n ordonnées que l'on calcule, de telle façon que la parabole de degré $n-1$ donne exactement la surface pour le cas où la courbe donnée est une parabole de degré plus petit que $2n$; or dans ce cas, la différence entre la parabole

d'interpolation et la courbe est de la forme $f(x)\ \theta_{n-1}$; on doit donc avoir

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\theta_{n-1}\,dx = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $f(x)$ limite un accord de degré $n+1$; nous retrouvons le même résultat. On prendra donc

$$f(x) = \mathrm{ND}^n\,[(x-x_0)^n\,(x-\mathrm{X})^n]$$

ou

$$f(x) = \mathrm{ND}^n\,(x^2-h^2)^n.$$

Si on veut que le coefficient de x^n soit l'unité, on prendra

$$f(x) = \frac{2n!}{n!}\,\mathrm{D}^n(x^2-h^2)^n. \qquad (1)$$

840. Coefficients. — La formule de Gauss est de la forme

$$\mathrm{A} = \Sigma\alpha_i \mathrm{F}(x_i). \qquad (2)$$

On a

$$\alpha_i = \int_{x_0}^{X} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_i)f'(x_i)}.$$

Mais cette formule est peu pratique parce que les racines sont incommensurables et que la division par $x-x_i$ est pénible.

Nous arriverons à une valeur plus convenable[1] en appliquant la formule (2) au cas particulier

$$\mathrm{F}(x) = \frac{f(x)f'(x)}{x-x_i}.$$

La formule (2) est exacte parce qu'il s'agit d'une parabole de degré $2n-2$. Nous trouvons que toutes les ordonnées $\mathrm{F}(x_1)$, $\mathrm{F}(x_2)$ ... sont nulles sauf

$$\mathrm{F}(x_i) = f'^2(x).$$

(1) Cette formule est établie par M. Hermite, dans son cours d'analyse, au moyen des propriétés des polynômes de Legendre.

On a

$$A = \int_{x_0}^{X} \frac{f(x) f'(x)}{x - x_i} dx$$

ou en intégrant par parties

$$A = \left[\frac{f^2(x)}{x - x_i}\right]_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} f(x) \, D \frac{f(x)}{x - x_i} dx.$$

L'intégrale est nulle, car $f(x)$ est multiplié par une fonction de degré $n - 2$; on trouve en supposant $x_0 = -h$, $X = h$ et en remarquant que $f(x)$ est une fonction paire ou impaire,

$$A = f^2(h) \frac{2h}{h^2 - x_i^2}.$$

La formule (2) devient :

$$f^2(h) \frac{2h}{h^2 - x_i^2} = \alpha_i f'^2(x)$$

d'où

$$\alpha_i = \frac{(2h)^{2n}}{(h^2 - x_i^2) f'^2(x_i)} \frac{n!^4}{2n!^2} \qquad (3)$$

841. Théorie de Gauss. — Gauss a démontré sa formule en s'appuyant sur la théorie des fractions connues. L'artifice que nous venons d'employer permet d'établir très-rapidement cette théorie. Il s'agit de trouver le développement

$$\int_{x_0}^{X} F(x) dx - \Sigma \alpha_i F(x_i) = A \frac{F^{(2n)}(o)}{1.2.3...2n} + \cdots$$

Les quantités d_i et x_i doivent être choisies de manière qu'en développant tous les fonctions F par la formule de Maclaurin, les dérivées de 0 à $2n - 1$ disparaissent du premier membre. En appliquant la formule à un cas particulier, on trouve une relation entre les coefficients α_i, x_i, A etc.; en prenant $F(x) = \psi(x, u)$ nous trouverons une infinité de

relations qui fourniront tous les paramètres. Prenons l'hyperbole

$$F(x) = \frac{1}{u - x},$$

$$\frac{F^m(o)}{1.2.3...m} = \frac{1}{u^{m+1}}.$$

Il vient

$$l\frac{u+h}{u-h} = \Sigma \frac{a_i}{u - x_i} + \frac{A}{u^{2n+1}} + \frac{B}{u^{2n+2}} + \cdots$$

Si on considère u comme infiniment grand, le logarithme du premier membre est exprimé par une fraction rationnelle de u plus des infiniment petits d'ordre supérieur à $2n$. Ce développement ne peut se faire que d'une seule manière et on l'obtiendra en réduisant le logarithme en fraction continue. On a

$$l\frac{u+h}{u-h} = 2\left(\frac{h}{u} + \frac{h^3}{3u^3} + \cdots\right).$$

On trouvera

$$l\frac{u+h}{u-h} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots}}}$$

en opérant comme s'il s'agissait de nombres, mais en prenant comme quotients incomplets la partie entière en u. On démontre que ces quotients incomplets sont du premier ordre en u; la réduite de rang n a pour dénominateur une fonction de degré n et d'après la forme de la différence entre la fraction complète et cette réduite, on voit que cette dernière est précisément la fraction rationnelle cherchée.

842. Développement de l'erreur. — Nous supposons $x_0 = -h$, $X = h$; il y a symétrie; nous pouvons appliquer la formule (4) du numéro 829. Comme $f(x)$ détermine un

accord d'ordre $n+1$, on peut transformer chaque intégrale par la formule du numéro 800, et on trouve

$$\varepsilon = \frac{n!}{2n!} \sum_{n}^{\infty} \frac{F^{2m}(o)}{1.2...2m} \int_{x_0}^{X} (h^2 - x^2)^n E^{(n)} \frac{x^{2m}}{f(x)} dx.$$

Pour le premier terme

$$E = x^n + \cdots, \quad E^{(n)} = n!$$

$$\int_{x_0}^{X} (h^2 - x^2)^n dx = h^{2n+1} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx.$$

En utilisant l'intégrale du numéro 792, il vient :

$$\varepsilon = \frac{n!^4}{2n!^2} (2h)^{2n+1} F^{2n}(o) + \cdots$$

Les autres termes se calculent facilement; on a :

$$E^n \frac{x^{2m}}{f(x)} = ax^{2m-n} + bx^{2m-n-1} + \cdots$$

Toutes les intégrales à calculer sont de la forme

$$\int (h^2 - x^2)^n x^i dx.$$

En remarquant que

$$x = \frac{x+h}{2} + \frac{x-h}{2}$$

on est ramené à des intégrales connues. La loi de formation des termes est assez complexe.

843. Calcul de l'erreur. — Prenons comme parabole d'interpolation une parabole de degré $2n-1$ satisfaisant aux conditions $F(x_i)$, $F'(x_i)$; la formule de Gauss donne l'aire exacte de cette parabole. On obtiendra l'erreur en remplaçant $F^{2n}(x)$ par une valeur intermédiaire, parce que sur chaque verticale, il y a un nombre pair de conditions de seconde espèce. On a donc (1)

$$\varepsilon = \frac{n!^4}{2n!^2} (2h)^{2n+1} F^{2n}(a) \qquad (4)$$

(1) La formule de M. Hermite donne immédiatement la solution de ce problème; on se trouve dans le cas (814, remarque) où $f(x)$ est un carré

Nous pouvons aussi mettre cette erreur sous la forme d'une aire. Si nous prenons la même parabole d'interpolation, on a

$$\varepsilon = (-1)^{2n+1} \int_{x_0}^{X} \varphi F^{2n}(z)\, dz. \qquad (5)$$

L'accord dont φ est l'intégrale d'ordre $2n$ se compose du rectangle de hauteur -1, de n forces et n couples concentrés sur les verticales de Gauss. Les moments des couples s'évanouissent parce que ce sont les coefficients de $F'(x_i)$ dans la formule de quadrature. Il résulte de là que nous avons aussi démontré la proposition suivante : en plaçant des forces sur les verticales de Gauss, on peut réaliser un accord parfait de degré $2n+1$ entre ces forces et le rectangle de hauteur -1. La fonction φ ne change pas de signe; si $F^{2n}(z)$ est compris entre $F_1(z)$ et $F_2(z)$, on trouvera deux limites de l'erreur en évaluant deux aires.

Nous pouvons aussi considérer φ comme l'intégrale d'ordre $2n+1$ d'un accord formé d'une force 1 en X, d'une force -1 en x_0 et de n couples en $x_1, x_2 \ldots x_n$; c'est alors un accord parfait de $2n+2$ forces, et on peut l'écrire

$$\varepsilon = (-1)^{2n+1} \int_{x_0}^{X} I_{2n+1} F^{(2n)}(z)\, dz. \qquad (6)$$

Cette considération va nous permettre de retrouver d'une autre manière les coefficients de la formule de Gauss et le développement de l'erreur.

Appliquons les formules du numéro 808; nous utiliserons la fonction

$$f_1(x) = (x - x_0)(x - X) f^2(x).$$

---

parfait. Cette application de la formule de M. Hermite a été faite par M Markoff en 1884; le géomètre russe a traité le cas où il y a un facteur obligé. Lorsque ce facteur est l'unité, les calculs peuvent être achevés; on arrive à la formule donnée plus haut, formule qui a été trouvée directement par M. Mansion (comptes rendus de Paris 1886).

Les forces et les couples de l'accord sont donnés par les formules (10) du numéro 808 (1); on trouve sur les verticales X et x_0 les forces

$$\frac{1}{(X-x_0)f^2(X)}, \quad \frac{1}{(x_0-X)f^2(x_0)};$$

ces forces sont égales et de signe contraire. Les forces situées sur les autres verticales sont nulles; il est inutile de les calculer; le moment de l'un des couples est :

$$M_i = -v_i = \frac{-1}{(x_i-x_0)(x_i-X)f'^2(x_i)}.$$

La force située sur la verticale X doit être ramenée à l'unité; les couples deviennent alors les coefficients de la formule de Gauss; on trouve :

$$\alpha_i = \frac{-(X-x_0)f^2(X)}{(x_i-x_0)(x_i-X)f'^2(x_i)},$$

formule qui devient identique à la formule (3) du numéro 840, lorsqu'on prend $x_0 = -h$, $X = +h$. Si dans la formule (6), on suppose que I_{2n+1} s'applique à l'accord pris avant la réduction à l'unité de la force en X, on doit faire subir une correction à l'intégrale; on trouve :

$$\varepsilon = (-1)^{2n+1}(X-x_0)f^2(X)\int_{x_0}^{X} I_{2n+1}F^{(2n)}(z)dz.$$

Si on développe la fonction $F^{(2n)}(z)$ par la formule de Taylor, on retrouve le développement de l'erreur et les coefficients s'expriment au moyen des moments de divers ordres de l'accord. Prenons, par exemple :

$$F^{2n}(z) = F^{2n}(x_0) + (z-x_0)F^{2n+1}(x_0) + (z-x_0)^2F^{2n+2}(x_0) + \cdots$$

(1) Une petite erreur s'est glissée dans ces formules; au lieu de $v_1\ v_1'\ v_1''\ \ldots\ v_1^{(\alpha-1)}$ il faut lire $v_1^{(\alpha-1)}\ v_1^{(\alpha-2)}\ \ldots\ v_1'\ v_1$, en renversant les indices supérieurs.

Remarquons que par raison de symétrie, on a

$$\int_{x_0}^{X}(z-x_0)\cdot^{\mu}I_{2n+1}dz=\int_{x_0}^{X}(X-z)\cdot^{\mu}I_{2n+1}dz=J_{2n+\mu+2}.$$

Nous désignons par J les intégrales de l'accord pour $z=X$. Il vient :

$$\varepsilon=(-1)^{2n+1}(X-x_0)f^2(X)[J_{2n+2}F^{(2n)}(x_0)+J_{2n+3}F^{(2n+1)}(x_0)+\cdot]$$

Nous pouvons considérer les intégrales J comme les moments des forces de l'accord, les couples étant considérés comme des groupes de deux forces; les forces symétriquement placées sont de signes contraires; on a donc, si on prend x_0 comme origine des z :

$$J_{2n+\mu+2}=\Sigma P(X-z)\cdot^{2n+\mu+1}=-\Sigma Pz\cdot^{2n+\mu+1}.$$

Soit comme au numéro 807,

$$E\frac{z^{2n+\mu+2}}{z(z-X)f^2(z)}=z^{\mu}+q_1z^{\mu-1}+\cdots+q_{\mu}.$$

On a :

$$J_{2n+\mu+2}=-q_{\mu}1\cdot^{2n+u+1}.$$

La valeur de ε devient

$$\varepsilon=(X-x_0)f^2(X)\left[\frac{F^{2n}(x_0)}{2n+1!}+q_1\frac{F^{2n+1}(x_0)}{2n+2!}+\cdots\right]$$

ou

$$\varepsilon=\frac{n!^4}{2n!^2}(2h)^{2n+1}\left[\frac{F^{2n}(x_0)}{2n+1!}+q_1\frac{F^{2n+1}(x_0)}{2n+2!}+\cdots\right].$$

Lorsqu'on s'arrête dans le développement, on obtient le reste en remplaçant dans le terme suivant la dérivée par une valeur intermédiaire. En effet, on a

$$R=(-1)^{m+1}\int_{x_0}^{X}\varphi.F^m(z)\,dz.$$

On obtient φ en continuant les intégrations de I_{2n+1} et en introduisant des discontinuités pour augmenter le degré de

l'accord; il n'en résulte aucun changement de signe parce que les discontinuités se produisent à l'une des limites de l'accord. Si au contraire, on utilise le développement du numéro 842, on obtient le reste sous la forme

$$AF^{(m)}(a) \quad \text{ou} \quad A\frac{F^{(m)}a}{a}$$

selon que m est pair ou impair; cela provient de ce que les discontinuités de la fonction φ se produisent alors sur la verticale O.

844. Facteur obligé. — Si dans la formule (4) du numéro 836 nous exprimons que les abscisses sont choisies de telle sorte que les n premiers termes du développement de l'erreur s'évanouissent, nous trouvons n équations de la forme

$$\int_{x_0}^{X} V f(x)\, \theta_{n-1}\, dx = 0$$

θ_{n-1} désignant une fonction entière de degré plus petit que n; nous satisferons à ces équations en prenant pour $f(x)$ le facteur harmonique de degré n de la fonction V (805). On peut aussi reproduire ici la seconde démonstration du numéro 839 en la modifiant légèrement et démontrer que c'est la seule solution du problème.

Les coefficients de la formule de quadrature se trouvent par les formules (3) du numéro 836.

On obtient l'erreur en supposant une parabole d'interpolation de degré $2n-1$ satisfaisant aux conditions $F(x_i)$ et $F'(x)_i$; la formule donne l'aire exacte de cette parabole; l'erreur commise est de la forme

$$\varepsilon = (-1)^{2n+1} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^{2n}(z)\, dz.$$

La fonction φ est l'intégrale d'ordre $2n$ d'un accord formé de la surface limitée par la courbe $-V$ et de n forces et n couples situés sur les verticales x_i; les moments des

couples s'annulent parce que ce sont les coefficients des $F'(x_i)$ dans la formule de quadrature. Si V ne change pas de signe, l'accord est parfait et on obtient l'erreur en remplaçant $F^{2n}(z)$ par $F^{2n}(a)$. Si V change de signe, il y a matière à discussion et on peut être conduit à remplacer la courbe $F^{2n}(z)$ par une droite ou une parabole.

Nous obtiendrons le développement de l'erreur en appliquant la formule (4) du numéro 836. Soit u la dernière des intégrales de l'accord $Vf(x)$, parmi celles qui s'annulent aux limites; on trouve (800) :

$$\varepsilon = \sum_{2n}^{\infty} \frac{F^{(m)}(o)}{1.2...m} \int_{x_0}^{X} u E^{(n)} \frac{xm}{f(x)} dx.$$

$$\varepsilon = \frac{n!}{2n!} F^{(2n)}(o) \int_{x_0}^{X} u dx + \cdots$$

Si V ne change pas de signe, on a

$$\varepsilon = \frac{n!}{2n!} F^{(2n)}(a) \int_{x_0}^{X} u dx.$$

On peut aussi obtenir le développement de l'erreur en introduisant les intégrales de φ (843). Le reste du développement s'exprime par une aire; il se met sous la forme

$$AF^{(m)}(a), \quad AF^{(m)}(o) + \frac{BF^{(m)}a}{(a)}$$

si V ne change pas de signe. Si V change de signe on doit quelquefois remplacer la courbe F^m (z) par une parabole (820). Des simplifications se produisent quand il y a symétrie.

845. Abscisses obligées. — On a déjà calculé n' ordonnées de la courbe; on veut en calculer n nouvelles; où faut-il les placer pour que les n premiers termes du développement de l'erreur s'évanouissent?

Soient : $V = 0$ l'équation qui a pour racines les abscisses

données, $f(x) = 0$ l'équation qui a pour racines les abscisses inconnues. Les équations de conditions sont de la forme

$$\int_{x_0}^{X} Vf(x)\theta_{n-1}dx = 0.$$

Donc $f(x)$ est le facteur harmonique de degré n de la fonction V; on l'obtient très-facilement (805) parce que V est une fonction entière[1]. La formule de quadrature est toujours

$$A = \Sigma\alpha_i F(x_i)$$

Les coefficients sont de deux espèces; si x_i est une abscisse obligée, on a

$$\alpha_i = \int_{x_0}^{X} \frac{Vf(x)\,dx}{(x - x_i)\,V_i'f(x_i)}.$$

Si x_i est une abscisse déterminée par l'équation $f(x) = 0$, on a

$$\alpha_i = \int_{x_0}^{X} \frac{Vf(x)}{(x - x_i)\,V_if'(x_i)}.$$

On peut aussi dans ce dernier cas, raisonner comme au numéro 840; prenons le cas particulier

$$F(x) = \frac{f(x)}{x - x_i} DVf(x).$$

On trouve que l'aire A a pour valeur

$$A = \left[\frac{Vf^2(x)}{x - x_i}\right]_{x_0}^{X}.$$

Cette aire est donnée exactement par la formule de quadrature; si les coefficients relatifs aux abscisses obligées sont

---

(1) Le problème n'est possible que si les racines de $f(x) = 0$ sont toutes comprises entre x_0 et X; il en est toujours ainsi lorsque les abscisses obligées sont x_0 et X.

déjà calculés, on trouvera une équation où α_i sera la seule inconnue.

Le développement de l'erreur se trouve comme au numéro précédent; on remarquera cependant qu'ici la fonction u est une fonction entière et que les calculs s'achèvent très-facilement. Prenons comme parabole d'interpolation une parabole de degré $2n + n' - 1$; la formule de quadrature donne l'aire exacte de cette parabole; l'erreur commise est de la forme

$$\varepsilon = (-1)^{2n+n'+1} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^{(2n+n')}(z)\, dz.$$

L'accord dont φ est l'intégrale d'ordre $2n + n'$, est constitué par une surface rectangulaire et $n + n'$ forces; il y a $2n + 2n'$ changements de signe; il y a donc n' changements de signe surabondants qui peuvent subsister dans la fonction φ. Ces changements de signe subsisteraient certainement si les abscisses obligées étaient peu différentes des n' abscisses de Gauss calculées pour le cas de $n + n'$ ordonnées. On peut donc être amené à remplacer la courbe $F^{2n+n'}(z)$ par une parabole de degré o à n', pour trouver la valeur de ε.

Si deux ordonnées obligées sont situées aux extrémités de l'arc, le nombre de changements de signe surabondants se réduit à $n' - 2$; s'il n'y a pas d'autres ordonnées obligées, la fonction φ ne change pas de signe; dans ce dernier cas, les abscisses, les coefficients et l'erreur se calculent avec autant de facilité que s'il n'y avait pas d'abscisses obligées. Le reste du développement s'exprime aussi par une aire ; la fonction analogue à φ peut présenter un nouveau changement de signe si le nombre de termes du développement est impair; d'autres changements de signe peuvent disparaître.

§ VI. — Intégrations successives par la parabole de Gauss.

846. Théorème. — On peut décomposer la parabole de Gauss en paraboles partielles telles que

$$y = \frac{F(x_i) f(x)}{(x - x_i) f'(x_i)};$$

l'aire limitée par une de ces paraboles a pour résultante d'ordre n, une aire équivalente concentrée sur la verticale x_i.

Nous démontrerons cette proposition (809) en montrant que l'aire concentrée forme avec l'aire parabolique changée de signe, un accord de degré $n + 2$. Prenons la verticale x_i comme axe des moments ; tous les moments de l'aire concentrée sont nuls ; les moments d'ordre n' de l'aire parabolique sont nuls également si n' est plus petit que $n + 1$; car leurs valeurs sont de la forme

$$\frac{F(x_i)}{f'(x_i)} \int_{x_0}^{X} \frac{(x_i - x)^{n'} f(x)}{x_i - x} = N \int_{x_0}^{X} \theta_{n-1} f(x)\, dx.$$

Cela démontre le théorème. Il est facile de voir que ce théorème est également vrai quand il y a un facteur obligé ou des abscisses obligées.

847. Intégrations graphiques successives. — D'après le théorème précédent, nous obtiendrons exactement les intégrales d'ordre 1 à $n + 1$ de la parabole de Gauss, prises en X ou au-delà, en remplaçant chacune des paraboles partielles par sa résultante. On est alors ramené au problème du numéro 827. Les directrices de la première intégration s'obtiennent en portant bout-à-bout des longueurs égales aux coefficients de la formule de Gauss. Les directrices de la seconde intégration sont les verticales x_i. Les directrices de la troisième intégration ont pour abscisses

$$x_0, \quad \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \ldots$$

et ainsi de suite. Lorsqu'on dépasse l'intégrale d'ordre $n+1$, alors la détermination des directrices n'est plus aussi simple; il faut introduire les intégrales supérieures de $f(x)$.

On peut aussi exprimer les intégrales moments par les formules :

$$\int_{x_0}^{X} (X - x)^{\cdot n'} F(x)dx = \Sigma \alpha_i (X - x_i)^{\cdot n'} F(x_i)$$
$$n' < n + 1.$$

848. Calcul de l'erreur. — Si nous exprimons $F(x)$ par la formule de Lagrange complétée par un développement, nous trouvons que l'erreur commise sur l'intégrale d'ordre $n'+1$ est donnée par

$$\varepsilon = \Sigma \frac{F^m(o)}{1.2...m} \int_{x_0}^{X} (X - x)^{\cdot n'} f(x) E \frac{x^m}{f(x)} dx.$$

Le premier terme du développement s'obtient en prenant $m = 2n - n'$, car si m est plus petit que $2n - n'$ l'intégrale s'évanouit. On trouve

$$\varepsilon = \frac{F^{(2n-n')}{}_0}{(2n - n')!} (-1)^{\cdot n'} \int_{x_0}^{X} f(x) (x^n + \cdot\cdot) dx + \cdots$$

$$\varepsilon = (-1)^{\cdot n'} \frac{n!^4}{2n!} (2h)^{\cdot 2n+1} \frac{F^{(2n-n')}(o)}{(2n-n')!} + \cdots$$

On voit qu'à chaque intégration, il y a une dérivée disparue qui reparaît; l'influence des verticales de Gauss va sans cesse en s'affaiblissant. On a aussi

$$\varepsilon = (-1)^{2n-n'+1} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^{2n-n'}(z) dz.$$

L'accord dont φ est l'intégrale est formé d'une aire parabolique et de n forces; il y a $2n$ changements de signe; il y a donc des changements de signe surabondants; l'expression de l'erreur est compliquée.

843. Autre méthode. — Soit à calculer

$$\int_{x_0}^{X} (X - x)^{\cdot n'} F(x)\,dx;$$

considérons $(X - x)^{\cdot n'}$ comme un facteur obligé; nous serons amenés à prendre les abscisses déterminées par l'équation (805)

$$\frac{D^n (x - X)^{n+n'} (x - x_0)^n}{(x - X)^{n'}} = 0.$$

En prenant ces abscisses, nous obtiendrons l'intégrale moment avec une erreur qui ne dépend que des dérivées d'ordre égal et plus grand que $2n$. On a alors

$$\varepsilon = (-1)^{2n+1} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^{2n}(z)\,dz.$$

La fonction φ ne change pas de signe. On trouve facilement le développement de l'erreur; on calcule cette erreur en remplaçant $F^{2n}(o)$ par $F^{2n}(a)$ dans le premier terme du développement. On trouve alors l'intégrale approchée par une seule opération graphique, traduction de la formule $\Sigma \alpha_i . F(x_i)$.

Cette méthode s'applique aussi au calcul d'une intégrale d'ordre n' satisfaisant à des conditions d'espèce quelconque; la partie difficile de cette intégrale est de la forme

$$(-1)^{n'} \int_{x_0}^{X} I_{n'} F^{n'}(z)\,dz.$$

On calcule l'intégrale en considérant $I_{n'}$ comme un facteur obligé et on trouve :

$$(-1)^{n'} \Sigma \alpha_i F^{n'}(z_i).$$

L'erreur commise dépend de $F^{2n+n'}(z)$.

NOTE IX.

L'interpolation par la méthode des moindres carrés.

850. Parabole d'interpolation. — On remplace la courbe $F(x)$ par une parabole de degré $n-1$; on détermine cette parabole $\psi(x)$ de manière que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} [F(x) - \psi(x)]^2 dx$$

soit la plus petite possible. La condition du minimum est :

$$\int_{x_0}^{X} [F(x) - \psi(x)] \delta\psi(x) dx = 0.$$

Or,

$$\psi(x) = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots$$

$$\delta\psi(x) = x^{n-1}\delta a + x^{n-2}\delta b + \cdots = \theta_{n-1}.$$

Il vient

$$\int_{x_0}^{X} [F(x) - \psi(x)] \theta_{n-1} dx = 0.$$

Il résulte de là que la différence entre les ordonnées de la courbe $F(x)$ et de la parabole d'interpolation détermine un accord de degré $n+1$. La courbe $\psi(x)$ doit rencontrer la courbe $F(x)$ en n points au moins. On peut dire aussi que l'aire parabolique est une aire résultante de l'ordre $n-1$; les moments d'ordre o à $n-1$ ne sont pas changés lorsqu'on remplace la courbe par la parabole d'interpolation.

Les paramètres de la parabole d'interpolation se calculent facilement en exprimant l'égalité des moments d'ordre o à $n-1$; mais si on connait les n premières intégrales de x_0 à X de la fonction $F(x)$, on peut déterminer très-élégamment le polygone d'intégration de la parabole. L'intégrale d'ordre n de la parabole est une parabole de degré $2n-1$ déterminée par un polygone de $2n-1$ côtés. Si on intègre

à partir de x_0, les $n-1$ premiers côtés sont situés sur l'axe des x. Les n intégrales de la parabole sont les mêmes que les intégrales de la courbe donnée pour $x = X$; on connait donc les ordonnées extrêmes de toutes ces intégrales et on peut tracer les $n-1$ derniers côtés du polygone de l'intégrale d'ordre n. Il ne reste qu'un côté à tracer; on l'obtient en joignant deux points connus; on trouve le polygone de la parabole d'interpolation par une simple dérivation.

851. Développement de l'erreur. — Calculons d'abord l'intégrale

$$y = \int_{x_0}^{X} (X - z)^{n-1} F(z)\, dz.$$

Nous pouvons considérer y comme l'intégrale d'ordre $2n$ de $F^n(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes :
pour x_0

$$y_0 = 0, \quad y'_0 = 0, \quad y''_0 = 0 \cdots y_0^{(n-1)} = 0,$$

pour $x = X$,

$$Y = \int_{x_0}^{X} (X - z)^{n-1} F(z)\, dz, \quad Y' = \int_{x_0}^{X} (X - z)^{n-2} F(z)\, dz$$

$$\cdots \cdots \qquad Y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{X} F(z)\, dz.$$

Remplaçons la courbe y par une parabole d'interpolation de degré $2n-1$ satisfaisant aux $2n$ conditions qui précèdent; soit $\chi(x)$ cette parabole; nous obtiendrons y en ajoutant un développement donné par la formule (6) du numéro 823. On y fera

$$f(x) = (x - x_0)^n (x - X)^n = (x^2 - h^2)^n$$

$$E\frac{x^m}{f(x)} = E\frac{x^m}{(x^2 - h^2)^n} = x^{m-n} + q_2 x^{m-n-2} + \cdots$$

Les dérivées $F^m(o)$ représentent dans la formule (6) les

dérivées de la fonction y, et deviennent ici $F^{(m-n)}(o)$. On a donc

$$Y = \chi(x) + (x^2 - h^2)^n \sum_{2n}^{\infty} \frac{F^{(m-n)}(o)}{1.2.3...m}(x^{m-n} + q_2 x^{m-n-2} + \cdots)$$

En prenant la dérivée d'ordre n de la fonction y, on obtient la fonction $F(x)$; $\chi^{(n)}(x)$ est la parabole d'interpolation $\psi(x)$ fournie par la méthode des moindres carrés; nous avons donc

$$F(x) = \psi(x) + \sum_{2n}^{\infty} \frac{F^{(m-n)}(o)}{1.2.3...m} D^n(x^2 - h^2)^n (x^{m-n} + q_2 x^{m-n-2} + \cdots).$$

Le développement de l'erreur est donc

$$\varepsilon = \frac{F^n(o)}{1.2.3...2n} D^n(x^2 - h^2)^n + \frac{F^{(n+1)}(o)}{1.2.3...2n+1} D^n(x^2 - h^2)^n x + \cdots \quad (1)$$

Posons

$$\frac{2n!}{n!} f(x) = D^n(x^2 - h^2)^n$$

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} f_1(x) = D^n(x^2 - h^2)^n x \text{ etc...}$$

La fonction $f(x)$ est l'ordonnée de la parabole harmonique; le coefficient de x^n est limité. De même $f_1(x)$ détermine un accord de degré $n+1$; c'est la parabole harmonique de degré $n+1$ satisfaisant à la condition $f^{(n)}(o) = 0$. Les autres coefficients s'interprêtent de la même manière. On a :

$$\varepsilon = \frac{F^n(o)}{1.2.3...n} f(x) + \frac{F^{(n+1)}(o)}{1.2.3...n+1} f_1(x) + \cdots \quad (2)$$

Remarquons que la fonction $F(x)$ doit satisfaire aux conditions Y, Y' ... $Y^{(n-1)}$, $F^{(n)}(o)$, $F^{(n+1)}(o)$ ...; la fonction $\psi(x)$ satisfait aux n premières conditions sans nuire aux autres; le premier terme de ε satisfait à la condition $F^{(n)}(o)$ sans nuire aux autres et ainsi de suite.

352. Calcul de l'erreur. — La fonction y est une inté-

grale qui satisfait à $2n$ conditions de première espèce ; on a :

$$y = \chi(x) + (-1)^{2n} \int_{x_0}^{X} \varphi . F^n(z)\, dz.$$

La fonction $F(x)$ est déterminée par des conditions de troisième espèce; en appliquant la théorie du numéro 819, nous trouvons

$$F(x) = \psi(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{X} u . F^{(n)}(z)\, dz. \qquad (3)$$

La fonction u est l'intégrale d'ordre $2n$ d'un accord constitué de la manière suivante : on introduit sur la verticale x un accord concentré de degré $n+1$; l'intégrale constante ou d'ordre $n+1$ est égale à 1. On détermine alors deux systèmes de n surfaces concentrés sur les verticales x_0 et X de manière à former avec l'accord précédent un nouvel accord de degré $2n+1$. Nous avons démontré que la fonction u pouvait subir un seul changement de signe; il y a matière à discussion; la fonction u est une fonction de z qui se modifie lorsque x varie; on prévoit donc que selon la valeur de x, la fonction u changera ou ne changera pas de signe.

On peut déterminer la fonction u par l'analyse; c'est l'intégrale d'ordre $2n$ d'un système d'aires concentrées; la courbe u est formée de deux arcs paraboliques de degré $2n-1$; ces deux arcs ont sur la verticale x un contact d'ordre $n-2$; le premier a n points sur l'axe des x en x_0; le second a n points sur l'axe des x en X. Si nous représentons l'ordonnée du premier arc par $\varphi(z)$, nous aurons respectivement entre x_0 et x, et entre x et X,

$$u = \varphi(z)$$

$$u = \varphi(z) + (z - x)^{n-1}.$$

La fonction u et $n-1$ dérivées s'annulent pour $z = X = h$; on en déduit :

$$\varphi(h) = -(h-x)^{n-1}, \quad \varphi'(h) = -(h-x)^{n-2}, \quad \ldots \quad \varphi^{(n-1)}(h) = -1.$$

D'où l'on tire

$$-\varphi(z)=(h-x)^{n-1}+(z-h)(h-x)^{n-2}+\cdots+(z-h)^{n-1}\mathrm{R}(z-h)^n.$$

Exprimons que cette fonction est divisible par $(z+h)^n$ ou $[2h+(z-h]^n$; nous trouverons

$$-\frac{\varphi(z)}{(z+h)^n}=[(h-x)^{n-1}+(z-h)(h-x)^{n-2}+\cdots$$
$$+(z-h)^{n-1}][2h+(z-h)]^{-n}-\mathrm{R}'(z-h)^{-n}.$$

On développe cette expression suivant les puissances croissantes de $z-h$ et on supprime tous les termes de degré supérieur à $n-1$; c'est cette suppression que nous indiquons par $-\mathrm{R}'(z-h)^n$.

On voit que la fonction u est assez compliquée. Il est difficile de discuter les changements de signe de u en partant de son expression analytique. Nous arriverons plus facilement au but en étudiant la dérivée d'ordre n de u, c'est-à-dire l'intégrale I_n de l'accord. La courbe I_n est une parabole unique de degré $n-1$; il faut y joindre une aire égale à l'unité concentrée sur la verticale x; cela résulte de ce que le système concentré sur la verticale x doit produire un accroissement brusque de I_{n+1} égal à l'unité. La parabole I_n est déterminée par n conditions : elle doit former un accord de degré $n+1$ avec l'aire égale à l'unité concentrée sur la verticale x.

Soit

$$\mathrm{T}=\mathrm{D}^{n-1}(z^2-h^2)^{n-1}(cz+d). \qquad (4)$$

La courbe T détermine un accord de degré n; nous déterminerons le rapport $c:d$ en exprimant que x est racine de $\mathrm{T}=0$. Nous allons démontrer que

$$\mathrm{I}_n=\mathrm{N}\frac{\mathrm{T}}{z-x} \qquad (5)$$

si on détermine le coefficient N par la condition

$$\mathrm{N}\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\frac{z-x}{\mathrm{T}}dx+1=0.$$

Il est d'abord évident que l'équation (5) représente une parabole de degré $n - 1$ dont l'aire est égale et de signe contraire à l'aire concentrée ; c'est en exprimant ces conditions que nous calculons N et $c : d$. Il ne s'agit plus que de vérifier les équations de moment. Prenons la verticale x comme axe des moments ; tous les moments de l'aire concentrée sont nuls ; il suffit de vérifier que les moments d'ordre 1 à $n - 1$ de l'aire parabolique sont également nuls. Le moment d'ordre $i - 1$ s'exprime par

$$N\int_{x_0}^{X}(x-z)^{i-1}\frac{T}{z-x}\,dz = N'\int_{x_0}^{X}(x-z)^{i-2}T\,dz.$$

Or T détermine un accord de degré n ; donc les intégrales précédentes s'annulent pour i variant de 2 à n ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons vu que l'on détermine le rapport $c : d$; on peut prendre c quelconque ; nous prendrons

$$cz + d = z - d'$$

ou si d' devient infini

$$cz + d = 1.$$

853. Discussion de la fonction T. — Nous écrirons

$$T = D^{n-1}(z^2 - h^2)^{n-1}(z - d'). \qquad (6)$$

Au lieu de nous donner x, nous ferons varier d' ; nous pourrons prendre pour x une des racines de l'équation $T = 0$. Nous nous proposons de discuter le mouvement des racines de l'équation $T = 0$, lorsqu'on fait varier d' de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour $d' = \pm\infty$, nous prendrons dans l'équation (4) $c = 0$ et $d = 1$; nous aurons :

$$T_1 = D^{n-1}(z^2 - h^2)^{n-1}. \qquad (7)$$

La courbe T_1 est la parabole harmonique de degré $n - 1$; soient $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ les racines de l'équation $T_1 = 0$; nous savons que ces racines sont comprises entre les limites $-h$

et $+ h$. Si nous considérons T_1 comme limite d'une fonction de degré n, nous pouvons dire aussi qu'il y a une racine à l'infini.

Donnons maintenant à d' une valeur quelconque; nous allons faire voir que les racines de l'équation $T = 0$ sont séparées par les racines de l'équation $T_1 = 0$. Nous pouvons mettre l'équation (6) sous la forme

$$T = (z - d')\,D^{n-1}(z^2 - h^2)^{n-1} + (n-1)\,D^{n-2}(z^2 - h^2)^{n-1}.$$

En posant $z = x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, le premier terme s'annule; le second terme est l'intégrale de la fonction T_1 prise à partir de $- h$; cette intégrale subit un changement de signe dans chacun des intervalles compris entre les racines $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ Il est facile de voir que T subit aussi un changement de signe en passant de $- \infty$ à x_1 et de x_n à ∞. Ainsi par exemple, pour $z = x_n$, T a le signe $(-1)^{n-1}$ comme T_1 pour les valeurs qui précèdent, tandis que T a le signe $(-1)^n$ pour $z = \infty$. Nous avons donc démontré que les racines $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ de l'équation $T = 0$ sont placées respectivement entre $- \infty$ et x_1 , x_1 et $x_2 \ldots x_{n-1}$ et $+ \infty$.

Faisons croître continûment d' de $- \infty$, à ∞ ; il est facile de voir que les racines vont croître la première de $- \infty$ à x_1, la seconde x_1 à x_2 et ainsi de suite. En effet, si d' subit un accroissement $\Delta d'$, on a d'après l'équation (1)

$$\Delta T = - \Delta d' D^{n-1}(z^2 - h^2)^{n-1} = - \Delta d' T_1$$

Si on fait $z = \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, on trouve $T + \Delta T = \Delta T$; toutes les valeurs de ΔT changent de signe puisque l'on dépasse chaque fois une racine de $T_1 = 0$. De plus, il n'y a pas de racine entre $- \infty$ et α_1, car on trouve que pour ces deux valeurs, $T + \Delta T$ a le signe $(-1)^n$; il y en a une, au contraire, entre α_n et $+ \infty$, car on trouve que $T + \Delta T$ a d'abord le signe $-$ et ensuite le signe $+$. Il est d'ailleurs évident que les racines doivent croître continûment, sinon d' ne varierait pas d'une manière continue.

Prenons $d' = -h$; la fonction T devient

$$S_0 = D^{n-1}(z^2 - h^2)^{n-1}(z + h). \qquad (8)$$

On reconnaît facilement que $z = -h$ est une racine; on voit donc que la racine α_1 qui varie de $-\infty$ à x_1 passe par la valeur $-h$ lorsque d' devient égal à $-h$ et que cette racine α_1 devient une racine intérieure pour d' plus grand que $-h$.

Prenons ensuite $d' = +h$; la fonction T devient

$$S_1 = D^{n-1}(z^2 - h^2)^{n-1}(z - h). \qquad (9)$$

On reconnaît que $z = h$ est une racine; donc la racine α_n qui varie de x_n à $+\infty$ passe par la valeur h quand d' est égal à h; la racine α_n est intérieure pour des valeurs de d' plus petites que h; elle est extérieure pour des valeurs de d' plus grandes que h.

Prenons $d' = 0$; la fonction T devient

$$T_2 = D^{n-1}(z^2 - h^2)z. \qquad (10)$$

C'est à un facteur constant près, l'équation de la parabole harmonique de degré n; on a, en effet,

$$D(z^2 - h^2)^n = 2n(z^2 - h^2)^{n-1}z$$
$$D^n(z^2 - h^2)^n = 2nT_2.$$

Nous pouvons, d'après cela, diviser l'intervalle $X - x_0$ en $2n - 1$ régions en déterminant les racines $-h, \beta_2 \cdots \beta_n$ de l'équation $S_0 = 0$ et les racines $\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_{n-1}, h$ de l'équation $S_1 = 0$. En faisant varier d' de $-h$ à $+h$, les racines $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha$ de l'équation $T = 0$ sont toutes intérieures; elles décrivent les intervalles de rang impair; α_1 passe de $-h$ à γ_1, α_2 de β_2 à γ_2 et ainsi de suite; en faisant $d' = 0$, on obtient les racines de la parabole harmonique de degré n; ces régions sont donc les régions voisines des racines de cette parabole harmonique de degré n; ce sont les régions décrites par les racines, de $T = 0$, lorsqu'il y a n racines intérieures.

Les autres régions sont décrites par les racines de $T = 0$ pour d' variant de h à $+\infty$ et de $-\infty$ à $-h$; ce sont les régions voisines des racines de la parabole harmonique de degré $n-1$; elles sont décrites par les racines de $T = 0$ lorsqu'il n'y a que $n-1$ racines intérieures; ces régions s'étendent, la première de γ_1 à x_1 et de x_1 à β_2, la seconde de γ_2 à x_2 et de x_2 à β_3 et ainsi de suite; ce sont les intervalles d'ordre pair. Nous sommes maintenant à même de répondre à cette question. On donne x, on détermine T, quel est le nombre de racines intérieures de l'équation $T = 0$? Deux cas peuvent se présenter; si x est situé dans l'une des régions d'ordre pair ou voisines des racines de $T_1 = 0$, il n'y a que $n-1$ racines intérieures; si au contraire x est situé dans une région d'ordre impair ou voisine des racines de l'équation $T_2 = 0$, alors les n racines de l'équation $T = 0$ sont situées entre les limites x_0 et X.

854. Régions des grandes erreurs. — Supposons que la valeur donnée de x soit située dans les intervalles d'ordre pair. Nous venons de voir que l'équation $T = 0$ n'a que $n-1$ racines entre les limites x_0 et X; donc la fonction I_n ne subit que $n-2$ changements de signe. Pour former l'accord de degré $n+1$, il faut introduire une aire concentrée sur la verticale x; cela porte le nombre de changements de signe à n; il en résulte que l'accord est parfait et que la fonction u ne change pas de signe. On obtiendra donc exactement la valeur de l'erreur en faisant la fausse hypothèse $F^n(z) = F^n(a)$; le développement de l'erreur donne alors

$$\varepsilon = \frac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} f(x). \qquad (11)$$

Cette formule est aussi vraie pour les valeurs $x = -h$, $x = +h$ qui peuvent être considérées comme formant deux régions extrêmes de grandes erreurs.

855. Régions des petites erreurs. — Supposons

que la valeur donnée de x soit située dans les intervalles d'ordre impair. Nous avons vu qu'alors les n racines de l'équation $T = 0$ sont toutes entre les limites x_0 et X; la fonction I_n présente alors $n - 1$ changements de signe et après l'introduction de l'aire concentrée sur la verticale x, on trouve $n + 1$ changements de signe. L'accord dont u est l'intégrale d'ordre n est alors imparfait; il y a un changement de signe surabondant. Ce changement ne peut pas disparaître parce que les changements de signe surabondants disparaissent en nombre pair. Donc la fonction u change de signe. Soit b la valeur de z qui annule la fonction u; on obtiendra exactement la valeur de l'erreur en faisant la fausse hypothèse

$$F^n(z) = F^n(b) + \frac{F^n(a) - F^n(b)}{a - b}(z - b)$$

ce qui donne :

$$F^{(n)}(o) = \frac{aF^n(b) - bF^n(a)}{a - b}$$

$$F^{n+1}(z) = \frac{F^n(a) - F^n(b)}{a - b}.$$

On a donc

$$\varepsilon = \frac{aF^{(n)}(b) - bF^n(a)}{1.2.3...n(a-b)} f(x) + \frac{F^{(n)}(a) - F^n(b)}{1.2.3...(n+1)(a-b)} f_1(x). \quad (12)$$

On arrive à une formule plus simple en remarquant que

$$\frac{F^{(n)}(a) - F^{(n)}(b)}{a - b} = F^{(n+1)}(a')$$

$$F^{(n)}(z) = F^{(n)}(b) + (z - b) F^{(n+1)}(a').$$

On trouve

$$\varepsilon = \frac{F^{(n)}(b) - bF^{(n+1)}a'}{12.3...n} f(x) + \frac{F^{(n+1)}(a')}{1.2.3...n+1} f_1(x). \quad (13)$$

Si x est une des racines de la parabole harmonique de

degré n, on a

$$\varepsilon = \frac{F^{n+1}(a')}{1.2.3...(n+1)} f_1(x). \qquad (14)$$

Supposons que $F^n(z)$ varie peu; alors $F^{n+1}(a')$ est très-petit; d'autre part, $f(x)$ est très-petit parce que l'on se trouve dans les régions voisines des racines de $f(x) = 0$. On peut donc dire que les erreurs sont probablement plus petites dans les intervalles d'ordre pair que dans les intervalles d'ordre impair. C'est ce que nous a autorisé à désigner les premières régions sous le nom de régions des grandes erreurs et les secondes sous le nom de régions des petites erreurs. Mais il faut remarquer que si $F^n(z)$ varie irrégulièrement, il est impossible d'émettre aucune opinion sur la grandeur relative des erreurs.

Les formules (12) et (13) ont l'inconvénient d'exiger le calcul de la valeur de b qui annule la fonction u. On peut établir une formule où cette valeur ne figure pas. La courbe u limite deux aires de signe contraire; nous écartons le cas où ces aires se compensent parce qu'alors on applique la formule (14). Nous pouvons former un accord du second degré en ajoutant à l'aire u une aire A concentrée sur la verticale x_0 ou X; si nous plaçons cette aire concentrée du côté de la plus petite des deux aires limitées par la courbe u, nous aurons un accord parfait u_0. On a alors :

$$\int_{x_0}^{X} u_0 F^{(n)}(z)\, dz = AF^{(n)}(\pm h) + \int_{x_0}^{X} u F^{(n)}(z)\, dz$$

on a aussi

$$\int_{x_0}^{X} u_0 F^{(n)}(z)\, dz = \int_{x_0}^{X} u_1 F^{(n+1)}(z)\, dz.$$

D'où l'on tire :

$$\int u F^{(n)}(z)\, dz = -AF^n(\pm h) - \int_{x_0}^{X} u_1 F^{(n+1)}(z)\, dz.$$

Comme u_1 ne change pas de signe, on obtiendra exactement la valeur de ε en faisant la fausse hypothèse $F^{(n+1)}(z) = F^{(n+1)}(a)$, ou

$$F^n(z) = F^n(\pm h) + (z \mp h) F^{n+1}(a).$$

Le développement de l'erreur donne alors

$$\varepsilon = \frac{F^{(n)}(\pm h) \mp h F^{(n+1)}(a)}{1.2.3...n} f(x) + \frac{F^{(n+1)}(a)}{1.2.3...(n+1)} f_1(x)$$

ou en posant

$$f_2(x) = \mp (n+1) h f(x) + f_1(x)$$

$$\varepsilon = \frac{F^{(n)}(\pm h)}{1.2.3...n} f(x) + \frac{F^{(n+1)}a}{1.2.3...n+1} f_2(x). \qquad (15)$$

Il s'agit de voir quand il faut prendre $+h$ ou $-h$. Si nous appliquons la formule (3) au cas particulier $F^n(z) = 1$, on a

$$\varepsilon = (-1)^n \int_{x_0}^{X} u dz.$$

Or le développement donne alors

$$\varepsilon = \frac{f(x)}{1.2.3...n}.$$

On a donc

$$A = -\int_{x_0}^{X} u dz = \frac{(-1)^{n+1} f(x)}{1.2.3...n}.$$

Si nous nous trouvons près de la racine de rang k de $f(x) = 0$, le signe de A sera $(-1)^k$ ou $(-1)^{k+1}$ selon que x est plus petit ou plus grand que cette racine. Dans les environs de $x_0 = -h$, la fonction u a le signe $(-1)^k$. Donc il faudra prendre $-h$ ou $+h$ selon que x est plus petit ou plus grand que la racine de $f(x) = 0$ qui se trouve dans la même région.

356. Cas où $F^{(n)}(z)$ ne change pas de signe. — Nous

avons démontré que la parabole d'interpolation coupe la courbe donnée au moins en n points. Si $F^{(n)}(z)$ ne change pas de signe, ces points sont situés dans les régions voisines des racines de la parabole harmonique de degré n. En effet, en dehors de ces régions, l'erreur est donnée par la formule (11); si $F^{(n)}(a)$ ne change pas de signe l'erreur a le signe de $f(x)$. Si on se déplace dans l'un des intervalles d'ordre pair, $f(x)$ ne change pas de signe; donc l'erreur ne s'annule jamais dans l'un de ces intervalles. Si on considère un intervalle d'ordre pair séparé du précédent par un intervalle d'ordre impair, on trouve alors une erreur de signe contraire, car $f(x)$ a changé de signe. Il doit donc exister dans l'intervalle d'ordre impair qui sépare ces deux régions au moins un point où l'erreur est nulle.

Supposons que la fonction $F^{(n)}(z)$ varie de toutes les manières possibles, mais en restant comprise entre O et M. On demande de déterminer les limites supérieures et inférieures de l'erreur. Dans les régions des grandes erreurs, on applique la formule (11) et on trouve pour limites

$$\varepsilon'' = 0 \quad \varepsilon' = \frac{M}{1.2.3...n} f(x).$$

Traçons (fig. 349) la parabole harmonique de degré n qui représente ε'; on trouve comme limites supérieures et inférieures des arcs de cette parabole et l'axe des x. Nous n'avons représenté que deux intervalles d'ordre pair séparés par un intervalle d'ordre impair; dans l'intervalle A'B' les limites sont AB et A'B'; dans l'intervalle C'D' les limites sont C'D' et CD.

Dans les intervalles d'ordre impair, on a

$$\varepsilon = (-1)^n \int_{x_0}^{X} u F^{(n)}(z)\, dz.$$

La fonction u change de signe pour $z = b$; on trouve

comme limites :

$$\varepsilon'' = \mathrm{M}\,(-1)^n \int_{x_0}^{b} u\,dz = \mathrm{M}\omega''$$

$$\varepsilon' = \mathrm{M}\,(-1)^n \int_{b}^{\mathrm{X}} u\,dz = \mathrm{M}\omega'.$$

Nous désignons par ω' et ω'' les deux aires de signe contraire limitées par la courbe u.

Si nous nous plaçons d'abord en B′ nous pouvons encore appliquer la formule (11); on a $\omega'' = 0$. Si nous nous déplaçons vers la droite, la verticale b, où u change de signe, se déplace aussi vers la droite, car nous avons vu que c'est alors la grande surface qui est du signe de $f(x)$. Donc on va trouver comme limite inférieure une courbe $\varepsilon = \mathrm{M}\omega''$ représentée en B′C; on démontre facilement que cette courbe a un contact d'ordre $n+1$ avec l'axe des x. On trouve de même comme limite supérieure une courbe $\varepsilon = \mathrm{M}\omega'$, représentée en BC′; cette courbe a un contact d'ordre $n+1$ avec l'axe des x. Ces deux courbes possèdent la propriété suivante :

$$\varepsilon' + \varepsilon'' = (-1)^n \mathrm{M} \int_{x_0}^{\mathrm{X}} u\,dz = \frac{\mathrm{M}}{1.2.3\ldots n} f(x).$$

Connaissant la parabole BC et l'une des courbes B′C, on en déduit l'autre. Il résulte de là qu'aux points B et C, il y a aussi contact d'ordre $n+1$ entre la parabole harmonique et les deux courbes. Les ordonnées des courbes B′C et BC′ s'expriment algébriquement en fonction de x et de b; or b est racine d'une équation de degré $n-1$; les équations de ces courbes sont donc compliquées. Ces courbes sont les enveloppes des paraboles que l'on obtient en supposant $\mathrm{F}^{(n)}(z) = \mathrm{M}$ de x_0 à b et $\mathrm{F}_{(n)}(z) = 0$ de b à X ou inversement.

Supposons que la fonction $\mathrm{F}^{(n)}(z)$ varie de toutes les manières possibles mais en restant comprise entre deux

limites de même signe m et M. Nous pouvons poser

$$F^{(n)}(z) = m + \mu.$$

On a donc

$$\varepsilon = (-1)^n \int_{x_0}^{X} m.udz + (-1)^n \int_{x_0}^{X} \mu udz.$$

Nous pouvons décomposer l'erreur en deux parties; la première est l'erreur calculée dans l'hypothèse où $F^{(n)}(z) = m$; on a alors d'après le développement

$$\varepsilon''' = \frac{m}{1.2.3...n} f(x).$$

La seconde partie est l'erreur calculée dans l'hypothèse ou $F^n(z) = \mu$; μ peut varier de o à $M - m$. Nous représenterons les limites de cette seconde partie par une figure analogue à la figure 349; il suffira d'ajouter ε''' aux limites ainsi trouvées. On obtient alors la figure 350. On la construit en traçant les deux paraboles harmoniques ABCD et A'B'C'D' ayant pour équations

$$\varepsilon''' = \frac{m}{1.2.3...n} f(x)$$

$$\varepsilon' = \frac{M}{1.2.3...n} f(x).$$

On trace alors les courbes de raccordement BC' et B'C. On voit que l'erreur ne peut changer de signe que dans les régions analogues à EF. En d'autres termes, plus on restreint la variation de $F^{(n)}(z)$, moins les points, où l'erreur change de signe, peuvent s'écarter des racines de la parabole harmonique de degré n. On voit aussi que si on prenait comme limites de l'erreur les deux paraboles harmoniques ε' et ε''', on ne se tromperait que dans les régions où les erreurs sont les plus faibles.

857. Cas particulier. — Prenons $n = 2$; la parabole d'interpolation devient une ligne droite. Si on considère la courbe $F(x)$ comme le lieu des moments fléchissants d'une

poutre encastrée à ses deux extrémités, il faut prendre comme ligne de repère une ligne droite qui doit précisément satisfaire aux mêmes conditions que la droite d'interpolation déterminée par la méthode des moindres carrés. Si on applique la méthode précédente au calcul des limites de l'erreur, on reproduit identiquement la recherche des plus grands moments fléchissants produits par une charge $F''(x)$ pouvant varier de o à p ou de p à $p + q$ (587).

858. Polygone d'interpolation. — On veut remplacer une courbe $F(x)$ entre les limites x_0 et X par un polygone dont on donne les abscisses x_0, x_1, x_2 ... X des sommets. Les extrémités du polygone sont données sur la courbe. On demande de déterminer ce polygone de manière que l'intégrale du carré des erreurs soit la plus petite possible. Nous allons démontrer qu'on obtient la solution de ce problème en considérant $F(z)$ comme un lieu de moments fléchissants d'une poutre à plusieurs travées posée sur des appuis de niveau situés en x_0, x_1 x_2... X; le polygone d'interpolation est la ligne de repère de ces moments fléchissants; les erreurs sont les moments fléchissants vrais.

Désignons par M' l'ordonnée du polygone cherché; il faut rendre minima l'expression

$$\int_{x_0}^{X} (F(x) - M')^2 dx.$$

On trouve la condition

$$\int_{x^0}^{X} (F(x) - M')\, \delta M' dx. \qquad (1)$$

Or $\delta M'$ est l'ordonnée d'un polygone; nous pouvons considérer ce polygone comme l'intégrale seconde de forces appliquées en x_0, x_1, x_2... X; ces forces forment un accord du troisième degré car aux points x_0 et X, $\delta M'$ est nul. Posons $I_2 = \delta M'$. Soit y l'intégrale seconde de $F(z)$; soit

y' l'intégrale seconde de M′ assujettie aux deux conditions

pour x_0, $\quad y_0 = y'_0$
pour X $\quad Y = Y'$.

L'équation (1) peut s'écrire

$$\int_{x_0}^{X} \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx^2} \right) I_0 dx = 0.$$

On en déduit par la formule du numéro 800

$$\int_{x_0}^{X} (y - y') I_0 dx = 0.$$

Soient $p_0\ p_1\ p_2 \ldots$ P, les forces de l'accord I_0; cette équation devient

$$\Sigma p_i (y_i - y'_i) = 0.$$

Les forces p_0 et P disparaissent de cette équation parce que nous avons supposé $y_0 - y'_0 = 0$, $Y - Y' = 0$; les autres forces sont arbitraires; donc les équations de condition du minimum deviennent

$$y_1 - y'_1 = 0$$
$$y_2 - y'_2 = 0 \text{ etc.}$$

Si nous considérons F(x) comme un lieu de moments fléchissants, rapporté au polygone M′ pris comme ligne de repère, $y - y'$ est l'ordonnée de la courbe élastique et les équations expriment que les flèches de déformations sont nulles sur les appuis; donc il s'agit d'une poutre posée sur des appuis de niveau. C'est ce qu'il fallait démontrer.

859. Suite d'arcs paraboliques. — On remplace une courbe F (x) entre les limites x_0 et X par une suite d'arcs paraboliques de degré $n - 1$; on donne les extrémités de la ligne parabolique, les abscisses des points de jonction; on assujettit ces arcs paraboliques à avoir entre eux des contacts d'un certain ordre. Toutes ces conditions ne sont pas suffisantes pour les déterminer, mais on veut profiter de

l'indétermination pour que l'intégrale du carré des erreurs soit la plus petite possible.

Il s'agit de rendre minima l'expression

$$\int_{x_0}^{X} (F(x) - M')^2 dx$$

M′ étant l'ordonnée d'une ligne formée d'arcs paraboliques. La condition du minimum est

$$\int_{x_0}^{X} (F(x) - M')\, \delta M' dx. \qquad (1)$$

$\delta M'$ est évidemment l'ordonnée d'une ligne de même espèce que la ligne M′; nous pouvons considérer $\delta M'$ comme l'intégrale d'ordre n d'un système d'aires concentrées et poser $\delta M' = I_n$; nous supposons par exemple, que les paraboles M′ ou δ M′ qui se joignent sur une verticale x_i ont en ce point la même ordonnée et les mêmes dérivées sauf trois; il y aura des discontinuités dans les intégrales I_1, I_2, I_5. Nous pouvons aussi considérer I_n comme l'intégrale d'un accord d'ordre $n + 1$, pourvu que nous introduisions des systèmes concentrés sur les verticales extrêmes. Supposons par exemple que la courbe M′ ait un seul point commun en x_0 avec la courbe $F(x)$. Les valeurs de $I_1, I_2 \ldots I_{n-1}, I_n$ ne sont pas nulles sur la verticale x_0, mais on peut supposer qu'elles sont nulles pour la verticale $x_0 - dx_0$ et engendrer les valeurs extrêmes de $I_1, I_2 \ldots I_{n-1}, I_n$ par des systèmes concentrés. On raisonne de la même manière pour la verticale X. Si la courbe M′ était assujettie à avoir un contact d'un certain ordre avec la courbe $F(x)$ sur la verticale x_0, ces aires concentrées à l'extrémité seraient connues en partie; ainsi, par exemple, s'il n'y avait que deux dérivées différentes on n'introduirait que deux discontinuités inconnues sur la verticale x_0.

Mettons la condition du minimum sous la forme

$$\int_{x_0}^{X} (F(x) - M')\, I_n dx = 0.$$

Intégrons n fois les courbes $F(x)$ et M'; soient y et y' les intégrales; nous profiterons des constantes d'intégration pour assujettir y' à n conditions. L'équation précédente devient

$$\int_{x_0}^{X} \left[\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{d^n y'}{dx^n}\right] I_n dx = 0.$$

On en déduit (800)

$$\int_{x_0}^{X} (y - y') I_0 dx = 0.$$

Cette équation se met sous la forme :

$$\Sigma\left[p_i (y_i - y'_i) - m_i\left(\frac{dy_i}{dx_i} - \frac{dy'_i}{dx_i}\right) + n_i\left(\frac{d^2 y_i}{dx^2} - \frac{d^2 y'_i}{dx^2}\right)\right] = 0.$$

Toutes les quantités p_i, m_i, n_i sont arbitraires, sauf n d'entr'elles que l'on doit déterminer de manière à réaliser l'accord d'ordre $n+1$. Nous ferons disparaître les quantités qui ne sont pas arbitraires en profitant de l'indétermination des n constantes de y' pour annuler n différences analogues à

$$\frac{d^k y'}{dx^k} - \frac{d^k y'_i}{dx^k}.$$

Mais alors les paramètres qui restent dans l'équation sont arbitraires et nous devons égaler à zéro les autres différences. En résumé nous sommes amenés à égaler à zéro toutes les différences qui multiplient les cœfficients p_i, m_i, n_i.

Il est facile de voir que toutes ces conditions déterminent complètement la ligne y' et par suite la ligne M'. Nous avons considéré M' et $\partial M'$ comme des intégrales d'aires concentrées. Soit m le nombre des aires inconnues; il y a $m - n$ indéterminées, car il y a accord d'ordre $n+1$. En intégrant M' on introduit n constantes; donc la ligne y' dépend de m paramètres. Or nous avons précisément autant

d'équations qu'il y a d'aires concentrées inconnues; donc le problème est déterminé. On voit que la solution de ce problème est donnée par une méthode analogue à celle que nous avons suivie pour déterminer l'état de sollicitation d'une poutre à plusieurs travées. Remplaçons les paraboles y' par leurs polygones d'intégration; il est très-facile d'exprimer les conditions de contact des paraboles. On trace alors les polygones d'intégration par la méthode des fausses positions. On part de l'une des extrémités, on se donne arbitrairement les côtés qu'il n'est pas possible de déterminer; à l'autre extrémité il y aura un certain nombre de conditions non satisfaites. En faisant varier successivement les côtés arbitraires, on trouve la solution vraie par la méthode que nous avons employée pour résoudre un système d'équations du premier degré.

Proposons nous d'exprimer par des intégrales les valeurs de $y - y'$ et de $F(x) - M'$. Soit J_0 un accord de degré $2n$, nous écrirons :

$$\int_{x_0}^{X} J_0 (y - y') \, dz = \int_{x_0}^{X} J_{2n} [F^{(n)}(z) - M'^{(n)}] \, dz. \qquad (2)$$

Nous allons constituer l'accord J_0 de manière que le premier membre de cette équation se réduise à $y - y'$. A cet effet, calculons la valeur $\varphi = y - y'$ pour le cas particulier ou $F^{(n)}(z) = 0$, sauf sur la verticale x, où l'on a

$$\int_{x}^{x+\varepsilon'} F^{(n)}(z) \, dz = 1$$

et prenons $J_{2n} = \varphi$. L'accord J_0 comprend alors une force égale à l'unité sur la verticale x et les éléments de la dérivée d'ordre n de la ligne M'; il peut y avoir en outre des discontinuités dans les intégrales J_{n+1}, J_{n+2} ... aux extrémités de l'accord. Si par exemple la ligne M' n'a qu'un point à l'extrémité de la courbe $F(x)$, il y a une discontinuité à l'extrémité

correspondante de J_{n+1}. La fonction φ satisfait aux conditions

$$\varphi(x_0) = 0 \quad \varphi'(x_0) = 0 \quad \varphi^{(n-2)}(x_0) = 0$$
$$\varphi(x_i) = 0 \quad \varphi'(x_i) = 0 \quad \varphi''(x_i) = 0 \text{ etc.}$$

Le premier membre de l'équation (2) se réduit à $y - y'$, parce que les autres aires concentrées fournissent des termes de l'espèce

$$p_i(y_i - y'_i) - m_i\left(\frac{dy_i}{dx_i} - \frac{dy'_i}{dx_i}\right) + n_i\left(\frac{d^2y_i}{dx_i} - \frac{d^2y'_i}{dx_i}\right)$$
$$(-1)^{n+1} t_0 (Fx_0 - M'_0).$$

Tous ces termes s'évanouissent d'après les conditions qui déterminent M' et y'. Le second membre de l'équation (2) se simplifie à son tour; $M'^{(n)}$ est formé d'aires concentrées; donc

$$\int_{x_0}^{X} J_{2n} M'^{(n)} dz = \Sigma(p'_i \varphi(x_i) - m'_i \varphi'(x_i) + n' \varphi''(x'_i) = 0.$$

Il vient :

$$y - y' = (-1)^{2n} \int_{x_0}^{X} \varphi \,.\, F^{(n)}(z)\, dz.$$

On en déduit

$$F(x) - M' = (-1)^n \int_{x_0}^{X} u\, F^{(n)}(z)\, dz.$$

La fonction u est la valeur particulière de $y - y'$ pour le cas où $F_{(z)}^{(n)}$ se réduit à un accord d'ordre $n+1$ concentré sur la verticale x.

La fonction u change de signe de même que la fonction φ; la discussion des limites de l'erreur donnerait lieu à des recherches du même genre que la détermination des plus grands moments fléchissants d'une poutre à plusieurs travées.

Le principe de réciprocité des intégrales des aires concentrées prend dans le cas qui nous occupe une forme

très-simple. Si on suppose une aire concentrée dans la section z, on a

$$y - y' = \varphi(x'z).$$

Mais on aurait directement

$$y - y' = \varphi(z'x).$$

Donc

$$\varphi(x,z) = \varphi(z'x).$$

Dans la même hypothèse, on trouve :

$$F(x) - M' = (-1)^{2n} \frac{d^n \varphi(x'z)}{dx^n} = (-1)^{2n} \frac{d^n \varphi(z'x)}{dz^n}.$$

D'où l'on tire

$$u = \frac{d^n \varphi(z'x)}{dz^n}.$$

NOTE X.

Les accords et les poutres droites.

860. Tout par le planimètre. — On sait déjà que les intégrales des expressions udv ou $du\ dv$ peuvent s'obtenir par le planimètre quand on sait construire u et v. Les surfaces et les moments peuvent s'obtenir de cette façon. La théorie des accords permet de trouver par le planimètre toutes les intégrales d'ordre quelconque et notamment les moments fléchissants, efforts tranchants, déformations d'une poutre droite prismatique supportant une charge p représentée par une courbe donnée. Lorsque les appuis et encastrements sont de niveau, toutes les valeurs données des intégrales sont nulles et tous les éléments K, M, η, y se mettront sous la forme

$$\int_{x_0}^{X} \varphi . p dz. \qquad (1)$$

La courbe $\varphi . p$ peut être construite par la règle. Lorsqu'il y a des dénivellations d'appuis ou des encastrements obliques il faut ajouter à cette intégrale une expression que l'on peut construire également par la règle. On peut donc imaginer un système de constructions que l'on peut définir par ces mots : tout par le planimètre.

Ce système peut être considéré comme étant diamétralement opposé au système que nous avons suivi dans notre mémoire et qui peut être défini par ces mots : tout par les intégrations graphiques successives. L'intégration graphique donne directement les intégrales d'ordre quelconque; le planimètre demande que cette intégrale soit mise sous la forme (1). Le planimètre donne immédiatement les intégrales qui se présentent naturellement sous la forme (1) comme les moments de divers ordres; pour y appliquer l'intégration graphique nous devons transformer l'expression (1) en une intégrale d'un certain ordre. On voit que les transformations que nous allons faire connaître peuvent être appliquées dans les deux sens inverses selon qu'on se propose d'employer le planimètre ou l'intégration graphique.

Lorsqu'il sagit de déterminer la surface ou le moment d'une aire limitée, il peut y avoir doute au sujet des avantages du planimètre ou de l'intégration graphique; cela dépend de l'habileté de l'opérateur.

Mais s'il s'agit de déterminer une courbe intégrale il n'y a plus de doute possible, il faut rejeter le planimètre. Ainsi par exemple, une courbe de moments s'obtient directement par l'intégration graphique; par le planimètre on peut trouver une ordonnée, mais il faut recommencer toutes les transformations pour chaque ordonnée. C'est dire que nous ne préconisons pas le système que nous allons exposer; mais la théorie des accords nous a conduit à des transformations si curieuses que nous croyons devoir les faire connaître. Le principe de la réciprocité des intégrales nous permettra d'arriver à des résultats utiles au point de vue

de l'extension de la méthode des lignes d'influence aux poutres à plusieurs travées.

§ 1. — Poutre sur deux appuis.

861. Moments fléchissants et efforts tranchants. — Le moment fléchissant est l'intégrale seconde de la charge; les constantes sont déterminées par la condition que les moments fléchissants sont nuls aux extrémités de la poutre. On a donc

$$M = (-1)^2 \int_{x_0}^{X} \varphi \, p dz. \qquad (1)$$

La ligne φ est l'intégrale seconde d'un accord de trois forces; on voit immédiatement que c'est le lieu des moments fléchissants pour le cas d'une force égale à l'unité placée dans la section x où l'on veut calculer M.

Nous obtiendrons l'effort tranchant, soit en appliquant le théorème des charges dérivées, soit la théorie du numéro 819; on trouve

$$K = (-1^2 \int_{x_0}^{X} \frac{d\varphi}{dx} p dz = (-1) \int_{x_0}^{X} u p dz.$$

La ligne u est l'intégrale seconde d'un accord formé par un couple de moment 1 concentré sur la verticale x et par deux forces appliquées en x_0 et X. Nous ferons disparaître le signe moins en prenant un couple de moment — 1 et nous écrirons

$$K = \int_{x_0}^{X} u p dz. \qquad (2)$$

La ligne u est le lieu des moments fléchissants pour le cas d'un moment — 1 concentré sur la verticale x.

On arrive au même résultat en interprétant $\frac{d\varphi}{dx}$ par le

théorème des charges dérivées; le signe moins doit s'introduire parce que le déplacement dx de la force correspond à un déplacement $-dx$ de la poutre sous la force. La ligne φ est formée de deux droites; la ligne u est formée de deux droites parallèles séparées sur la verticale x par un Δu égal à -1.

862. Déformations. — La flèche de déformation y est une intégrale quatrième de la charge p; les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions

$$y_0 = 0, \quad \frac{d^2 y_0}{dx^2} = 0, \quad Y = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0.$$

On a donc

$$y = (-1)^4 \int_{x_0}^{X} I_4 \, p dz. \tag{3}$$

La courbe I_4 est l'intégrale quatrième d'un accord formé d'une force 1 en x, des deux forces et de deux accords du troisième degré concentrés sur les verticales extrêmes; c'est précisément la courbe élastique pour le cas d'une force égale à l'unité placée dans la section x.

L'inclinaison η dans la section x s'obtient par la formule

$$\eta = \int_{x_0}^{X} \frac{dI_4}{dx} p dz. \tag{4}$$

Il faut multiplier p par l'ordonnée de la courbe élastique déterminée pour le cas d'un moment égal à -1 concentré sur la verticale x.

Si la charge p comprenait des forces isolées ou même des systèmes concentrés, il faudrait ajouter à l'aire représentée par les formules (1) (2) (3) (4) certains termes que l'on obtient en multipliant les forces par les ordonnées des lignes φ, u, I_4, $\frac{dI_4}{dx}$, ou les moments concentrés par les inclinaisons de ces lignes prises en signe contraire.

863. Réciprocité. — Appliquons le principe de la réciprocité des intégrales. Supposons que la charge se réduise à une charge concentrée dans la section z différente de x; on a

$$\int_z^{z+\varepsilon} p\,dz = 1.$$

Les formules (1) (2) (3) (4) donnent immédiatement les effets produits dans la section x; on trouve

$$M = \varphi, \quad K = u, \quad y = I_4, \quad \eta = D_z I_4. \tag{5}$$

On déduit de là les conséquences suivantes : 1° Une force égale à 1 agit dans la section x et produit dans la section z un moment fléchissant égal à φ. Si on transporte la force dans la section z on retrouve en x le même moment φ. Le moment φ a été déterminé en supposant une force égale à l'unité; mais la propriété existe évidemment pour une force quelconque. 2° Un couple de moment — 1 (ou — P) concentré dans la section x produit dans la section z un moment fléchissant u; si nous plaçons dans la section z une force 1 (ou P) on retrouve en x un effort tranchant égal à u. 3° Une force égale à 1 (ou P) produit dans la section z une flèche de déformation égale à I_4; transportons la force dans la section z, nous retrouverons en x la même flèche I_4. 4° Un couple de moment — 1 ou (— P) concentré sur la verticale x produit dans la section z une flèche de déformation égale à $D_z I_4$; plaçons dans la section z une force égale à 1 (ou P), nous retrouverons en x une inclinaison η égale à $D_z I_4$.

864. Lignes d'influence. — Supposons la section x immobile et z variable; en d'autres termes faisons mouvoir la force 1 (ou P); déterminons les effets M, K, y, η produits dans la section x; portons ces quantités en ordonnées sur la verticale z, nous obtiendrons les lignes d'influence des M, K, y, η de la section x. Les formules (5) sont précisément les équations de ces lignes. De là résultent les quatre

théorèmes suivants : pour une force 1 (ou P), les lignes d'influence des M, des K, des y, des η d'une section x s'obtiennent respectivement en construisant 1° le lieu des moments fléchissants pour la force P appliquée à la section x, 2° le lieu des moments fléchissants pour un moment — P concentré dans la section x, 3° la courbe élastique pour une force P appliquée à la section x, 4° la courbe élastique pour un moment — P concentré dans la section x.

Les lignes d'influence permettent d'étudier les effets d'un système de forces isolées mobiles; il suffit de superposer les effets des différentes forces.

§ 2. — Poutres encastrées

865. Poutre encastrée aux deux extrémités. — La courbe élastique est l'intégrale quatrième de la charge assujettie aux conditions de première espèce :

$$y_0 = 0, \quad \frac{dy_0}{dx} = 0, \quad y_1 = 0, \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

On a donc

$$y = (-1)^4 \int_{x_0}^{X} I_4 \, p dz. \tag{1}$$

$$\eta = \int_{x_0}^{X} D_x I_4 \, p dz. \tag{2}$$

$$M = \int_{x_0}^{X} D_x^2 I_4 \, p dz. \tag{3}$$

$$K = \int_{x_0}^{X} D_x^3 I_4 \, p dz. \tag{4}$$

La courbe I_4 est l'intégrale quatrième d'un accord formé par une force 1 en x et deux systèmes de deux forces concentrés dans les sections d'encastrement. C'est préci-

sément la courbe élastique due à une force égale à l'unité appliquée à la section x. On en conclut que les courbes $D_x I_4$, $D_x^2 I_4$, $D_x^3 I_4$ sont respectivement les courbes élastiques dues 1° à un couple de moment — 1 concentré dans la section x, 2° à un $\Delta\eta = 1$ concentré dans la section x, 3° à un $\Delta y = -1$ concentré dans la section x. On peut déterminer facilement ces courbes par leurs polygones d'intégration; on peut donc représenter y, η, M et K par des aires; la courbe qui limite ces aires s'obtient en transformant les ordonnées de la courbe p par des constructions linéaires. Si les encastrements n'étaient pas de niveau, on aurait

$$y = -P_0 y_0 + M_0 \frac{dy_0}{dx} - P_1 y_1 + M_1 \frac{dy_1}{dx} + \int_{x_0}^{X} I_4 p dz$$

et trois autres formules que l'on obtient par dérivation. Il faut alors ajouter aux aires dont il a été question précédemment des termes qui sont précisément les y, η, M et K d'une poutre non chargée; on les obtient directement avec la plus grande facilité. Remarquons aussi que les quantités P_0, M_0, P_1, M_1 sont les éléments d'un accord parfait de cinq forces; on peut les obtenir par les formules du numéro 808; la force dans la section x doit être ramenée à l'unité. Ces quantités sont déterminées graphiquement par la construction de I_4 et leurs analogues par la construction de $D_x I_4$, $D_x^2 I_4$, $D_x^3 I_4$.

Le principe de la réciprocité des intégrales conduit aux propositions suivantes : 1° une force égale à 1 (ou P) agit dans la section x et produit dans la section z une flèche de déformation égale à I_4; si on transporte la force dans la section z on retrouve en x la même flèche I_4; 2° un couple de moment — 1 (ou — P) concentré dans la section x produit dans la section z une flèche égale à $D_x I_4$; si on applique une force 1 (ou P) dans la section z, on retrouve en x une inclinaison $\eta = D_x I_4$; 3° un $\Delta\eta = 1$ (ou P) est concentré dans la section x et produit dans la section z une flèche $D_x^2 I_4$,

si on applique une force 1 (ou P) dans la section z on retrouve en x un moment fléchissant $D_x^z I_4$; 4° un $\Delta y = -1$ (ou — P) est concentré dans la section x et produit dans la section z une flèche $D_x^z I_4$; si on applique une force 1 ou P dans la section z, on retrouve en x un effort tranchant $D_z^z I_4$.

On en déduit que les lignes d'influence, pour une force P, des y, η, M, K d'une section x s'obtiennent respectivement en construisant la courbe élastique pour une force P, un couple — P, un $\Delta\eta = P$, un $\Delta y = -P$ situés dans la section x.

866. Poutre encastrée à une extrémité, appuyée à l'autre. — La courbe élastique est l'intégrale quatrième de la charge assujettie aux conditions suivantes :

$$y_0 = 0, \quad \frac{dy_0}{dx} = 0, \quad y_1 = 0, \quad \frac{d^2y}{dx_1} = 0.$$

On retrouve :

$$y = \int_{x_0}^{X} I_4 \, p dz$$

et trois autres formules analogues. Toutes les conséquences que l'on déduit de ces formules sont trop semblables aux précédentes pour nous y arrêter.

§ 3. — Poutre a plusieurs travées.

867. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les abscisses des appuis; $y = F(x)$ l'équation de la courbe élastique; on donne $F(x_1)$, $F(x_2)\ldots$ $F(x_n)$ et $F''(x_1) = 0$ $F''(x_n) = 0$. Soit I_0 un accord du cinquième degré; on a, si $x_0 = x_1$, $X = x_n$,

$$\int_{x_0}^{X} I_0 \, F(x) \, dz = (-1)^4 \int_{x_0}^{X} I_4 \, F^{(4)}{}_{(x)} \, dz. \qquad (1)$$

Formons l'accord I_0 au moyen d'aires concentrées et de manière que le premier membre de l'équation (1) se réduise à

$$Fx + \Sigma P_i \, F(x_i) + N \, F''(x_1) + S \, F''(x_n).$$

Il suffit pour cela de former l'accord au moyen d'une force 1 dans la verticale x, de forces P_i sur les appuis, de deux accords du troisième degré concentrés dans les sections extrêmes et engendrant des discontinuités N et S dans I_3. Le second membre de l'équation (2) se transforme à son tour; on a $F^{(4)}_{(x)} = p.$, mais il faut tenir compte des aires concentrées dues aux réactions des appuis; ce second membre devient

$$\int_{x_0}^{X} I_4\, p dz + \Sigma R_i\, I_4(x_i).$$

Nous avons formé l'accord I_0 au moyen de $n+2$ éléments; il y a 4 conditions pour accorder ces éléments; il reste $n-2$ éléments arbitraires. On a déja $I_4(x_1) = 0$, $I_4(x_n) = 0$; nous y ajouterons les $n-2$ équations $I_4(x_i) = 0$ et alors l'équation (1) deviendra en remarquant que $F''(x_1) = 0$, $F''(x_n) = 0$

$$F(x) = -\Sigma P_i\, F(x_i) + \int_{x_0}^{X} I_4\, p dz.$$

Le premier terme exprime l'influence des dénivellations des appuis; si nous supposons les appuis de niveau on a :

$$y = \int_{x_0}^{X} I_4\, p dz. \tag{2}$$

$$\eta = \int_{x_0}^{X} D_x I_4 . p dz. \tag{3}$$

$$M = \int_{x_0}^{X} D_x^2 I_4 . p dz. \tag{4}$$

$$K = \int_{x_0}^{X} D_x^3 I_4 . p dz. \tag{5}$$

Il est facile de voir que nous obtiendrons I_4 en construisant la courbe élastique pour le cas d'une force égale à 1 sur la verticale x. En effet si nous prenons les dérivées de cette

courbe élastique nous obtenons dans I_3 des discontinuités extrêmes N et S, et des charges concentrées dans I_0 qui sont la force 1 et les réactions P_i des appuis; nous obtenons donc un accord constitué comme il doit l'être. Les conditions $I_4(x_i)$ sont d'ailleurs satisfaites. Cela démontre la proposition.

On en déduit que les courbes $D_x I_4$, $D_x^2 I_4$, $D_x^3 I_4$ sont les courbes élastiques calculées respectivement pour un $\Delta M = -1$, pour un $\Delta\eta = 1$, pour un $\Delta y = -1$ concentrés sur la verticale x.

Les lois de réciprocité sont les mêmes que pour la poutre encastrée. Il en résulte que les lignes d'influence, pour une force P mobile, des y, des η, des M, des K d'une section x sont respectivement les courbes élastiques pour un $\Delta K = 1$, un $\Delta M = -1$, un $\Delta\eta = 1$, un $\Delta y = -1$ concentrés sur la verticale x. On déduit de là un moyen de trouver les effets maxima d'un système de charges mobiles sur une section donnée.

§ 4. — Poutres superposées.

868. — Une poutre droite est posée sur plusieurs appuis $x_1, x_2 \ldots x_n$; elle supporte une seconde poutre qui repose sur elle aux points $x_1, a_1, a_2 \ldots ar, x_2, b_1, b_2$ etc...; la première poutre a un moment d'inflexibilité ε et supporte une charge p; la seconde poutre a un moment d'inflexibilité ε' et supporte une charge q. On demande de trouver les éléments des deux poutres.

Soient y, Y les ordonnées des courbes élastiques des deux poutres; on a

$$\varepsilon \frac{d^4 y}{dx_4} = p - S \tag{1}$$

$$\varepsilon' \frac{d^4 Y}{dx^4} = q + S - R. \tag{2}$$

Nous désignons par R l'ensemble des réactions des appuis et par S l'ensemble des réactions mutuelles des deux poutres.

Nous trouverons la solution du problème proposé en constituant deux poutres fictives : la poutre différentielle dont la courbe élastique aurait pour équation

$$u = Y - y \tag{3}$$

et la poutre moyenne dont la courbe élastique aurait pour équation

$$(\varepsilon + \varepsilon')v = \varepsilon y + \varepsilon' Y. \tag{4}$$

869. Poutre différentielle. — Attribuons à la poutre différentielle un moment d'inflexibilité ε_0; l'état de sollicitation de cette poutre est donnée par l'équation

$$\varepsilon_0 \frac{d^4 u}{dx^4} = \varepsilon_0 \left(\frac{d^4 Y}{dx^4} - \frac{d^4 y}{dx^4} \right)$$

ou

$$\varepsilon_0 \frac{d^4 u}{dx^4} = q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} - p \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + S \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) - R \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}.$$

C'est l'état de sollicitation d'une poutre qui serait sollicitée par la charge

$$q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} - p \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \tag{5}$$

et qui serait posée sur les appuis x_1, a_1, a_2 ... Ces appuis doivent être supposés de niveau, car en chacun de ces points on a $Y - y = 0$ ou $u = 0$. On déterminera donc avec la plus grande facilité tous les éléments de la poutre différentielle.

870. Poutre moyenne. — Nous attribuerons à la poutre moyenne un moment d'inflexibilité $\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')$; l'état de sollicitation de cette poutre est donné par l'équation

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon' \frac{d^4 Y}{dx^4} + \varepsilon \frac{d^4 y}{dx^4} \right)$$

ou

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{p + q}{2} - \frac{R}{2}. \tag{6}$$

C'est l'état de sollicitation d'une poutre qui supporterait la charge

$$\frac{p+q}{2}$$

et serait posée sur les appuis $x_1, x_2 \ldots x_n$. Les appuis sont au même niveau que les appuis de la poutre Y, car en ces points on a $Y = y$ et $v = Y$ d'après l'équation (4). On trouvera donc avec facilité tous les éléments de la poutre moyenne.

Connaissant les éléments des deux poutres fictives, on obtient aisément les éléments des poutres données. Pour ce qui concerne les flèches de déformation, on divisera la différence u en parties inversement proportionnelles aux coefficients ε et ε'; on porte ces deux parties, l'une au-dessus de la courbe v, l'autre en dessous. La même règle s'applique aux inclinaisons. Pour ce qui concerne les moments fléchissants et efforts tranchants, la poutre moyenne donne les moyennes arithmétiques des éléments inconnus; cela résulte de l'équation (6). Soit par exemple à déterminer les moments fléchissants M, M_1 des poutres y et Y connaissant les moments fléchissants N, N_1 des poutres u et v; on a d'abord

$$N_1 = \frac{M + M_1}{2}. \qquad (7)$$

De l'équation (3) ou de la formule (5), on déduit ensuite :

$$N = M_1 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} - M \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}.$$

Prenons

$$\frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon'}.$$

Il vient

$$\frac{M_1 + N}{\varepsilon'} = \frac{M + N}{\varepsilon}. \qquad (8)$$

Les équations (7) et (8) conduisent à une construction par les lignes proportionnelles. Si on prend comme inconnue le rapport (8) que l'on désigne par r, on a aussi les formules

$$r = \frac{2(N + N_1)}{\varepsilon + \varepsilon'}$$

$$M_1 = \varepsilon' r - N$$

$$M = \varepsilon r - N.$$

871. Solution par l'intégration graphique. — Intégrons quatre fois les charges p et q en ayant soin de tenir compte des coefficients ε et ε' à la troisième intégration; on trouve les courbes y et Y; ce sont les courbes des déformations si l'on introduit les lignes de repère y' et Y'. Le problème est ramené à trouver ces lignes de repère qui sont les courbes élastiques de deux poutres non chargées mais assujetties à passer par certains points dont les abscisses sont x_1, a_1, a_2 ... La poutre différentielle $y' - Y'$ est aussi une poutre non chargée; les ordonnées des points obligés sont connues, car on a

$$Y - Y' = y - y' \quad \text{d'où} \quad Y' - y' = Y - y.$$

On trouve donc très-facilement le polygone d'intégration de la courbe

$$u' = Y' - y'.$$

Constituons la poutre moyenne

$$(\varepsilon + \varepsilon')v' = \varepsilon' Y' + \varepsilon' y'.$$

C'est une poutre non chargée dont les points obligés ont pour abscisses x_1, x_2, x_3, ..., car les réactions mutuelles entre les deux poutres disparaissent comme précédemment. On trouvera le polygone d'intégration de la ligne v'; comme pour chaque travée $x_2 - x_1$ on a un seul polygone de trois côtés; on le décomposera en polygones partiels pour les segments $a_1 - x_1$, $a_2 - a_1$ ...; on divise alors les ordonnées du polygone de la ligne u' dans le rapport inverse des coefficients ε et ε' et on porte les deux

parties de part et d'autre du polygone de la ligne v'; on obtient les polygones des y' et des Y'; le problème est résolu. On peut aussi appliquer les solutions par l'épure des η, par l'épure des M et les transformées droites.

872. Solution par le planimètre. — Soit I_4 la courbe élastique d'une poutre posée sur les appuis de niveau $x_1, a_1, a_2 \ldots$ calculée pour une force égale à 1 dans la section x et pour un moment d'inflexibilité égal à 1. On a

$$\varepsilon_0 u = \int_{x_0}^{X} I_4 \left(\frac{q\varepsilon_0}{\varepsilon'} - \frac{p\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) dz. \tag{9}$$

Soit J_4 la courbe élastique d'une poutre posée sur les appuis $x_1, x_2 \ldots$ calculée pour une force 1 en x et un moment d'inflexibilité égal à 1 ; on a

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} v = \int_{x_0}^{X} J_4 \frac{p+q}{2} dz. \tag{10}$$

Nous supposons la poutre Y posée sur des appuis de niveau, sinon il y aurait de nouveaux termes à ajouter. Les formules (3) et (4) donnent alors Y et y; on trouve :

$$y = \int_{x_0}^{X} \varphi_{11}\, p dz + \int_{x_0}^{X} \varphi_{12}\, q dz \tag{11}$$

$$Y = \int_{x_0}^{X} \varphi_{21}\, p dz + \int_{x_0}^{X} \varphi_{22}\, q dz \tag{12}$$

$$(\varepsilon + \varepsilon')\, \varphi_{11} = J_4 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} I_4 \tag{13}$$

$$(\varepsilon + \varepsilon')\, \varphi_{12} = J_4 - I_4 \tag{14}$$

$$(\varepsilon + \varepsilon')\, \varphi_{21} = J_4 - I_4 \tag{15}$$

$$(\varepsilon + \varepsilon')\, \varphi_{22} = J_4 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} I_4. \tag{16}$$

Il est facile de démontrer que les courbes φ sont précisément les courbes élastiques produites dans les deux poutres

par une force égale à 1 appliquée dans la section x sur l'une ou l'autre poutre. Supposons par exemple une force 1 dans la section x de la poutre Y, on trouve pour la poutre différentielle une force isolée $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}$; donc

$$\varepsilon_0 u = I_4 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}.$$

On trouve pour la poutre moyenne

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} v = \tfrac{1}{2} J_4.$$

On en déduit, en appliquant les formules (3) et (4) $y = \varphi_{12}$, $Y = \varphi_{22}$. Nous donnerons plus loin une généralisation de cette loi de réciprocité. Pour obtenir les autres éléments des deux poutres il faut prendre les dérivées; mais à la seconde dérivée il faut multiplier par ε et ε'. On trouve pour les η, M, K des formules analogues aux formules (11) et (12), mais les fonctions φ sont remplacées par $D_x\varphi$, $\varepsilon D_x^2\varphi$, $\varepsilon D_x^3\varphi$. Ce sont encore les courbes élastiques produites par un couple -1, un $\Delta\eta$ égal à -1, un Δy égal à -1 concentrés dans la section x. Les lois de réciprocité s'énoncent facilement. Si une force isolée 1 parcourt la poutre y, les lignes d'influence des y et des Y sont respectivement les courbes φ_{11} et φ_{21}; si une force isolée 1 parcourt la poutre Y, les lignes d'influence des y et des Y sont respectivement les courbes φ_{12} et φ_{22}. On a $\varphi_{12} = \varphi_{21}$; de là on déduit un théorème facile à énoncer. En prenant les dérivées on trouve les lignes d'influence pour les autres éléments. De là résultent les propositions suivantes : une force P se meut sur l'une des poutres, les lignes d'influence des y, η, M, K d'une section x de la poutre y s'obtiennent en traçant les courbes élastiques respectivement pour

$$\Delta K = P, \quad \Delta M = -P, \quad \Delta\eta = +P, \quad \Delta y = -P,$$

ces systèmes étant concentrés dans la section x de la

poutre y. Les lignes d'influence pour la poutre Y s'obtiennent de la même manière.

§ 5. — Poutres a sections variables.

873. — Les théories précédentes s'appliquent aux poutres à sections variables. Pour abréger, nous prendrons immédiatement le cas où toutes les difficultés sont réunies. Une première poutre repose sur des appuis a_1, b_1, c_1 ...; une seconde poutre repose sur la première en des points $a_2, b_2, c_2 \ldots$; une troisième poutre repose sur la seconde en des points a_3, b_3, c_3 et ainsi de suite. Les poutres supportent respectivement des charges $p_1, p_2, p_3 \ldots p_r$. Soient $F_1(x), F_2(x) \ldots F_r(x)$ les ordonnées des courbes élastiques. Proposons-nous de trouver $F_i(x)$. A cet effet imaginons une force égale à l'unité au point x de la poutre que nous considérons et soient $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ les ordonnées des courbes élastiques engendrées dans les différentes poutres. Nous désignerons par φ', φ'', φ''', φ^{IV} les lignes des η, M, K, p dans cette hypothèse; ce sont des dérivées sauf φ'' qui s'obtient par l'opération

$$\varphi'' = \varepsilon \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varepsilon \frac{d\varphi'}{dx}.$$

Formons l'expression

$$\sum_1^r \int_{x_0}^X \varphi_1^{IV} F_1(z)\, dz.$$

Toutes les fonctions φ^{IV} s'annulent; mais il faut tenir compte des aires concentrées. La force égale à l'unité donne le terme $F_i(x)$; la réaction R d'un appui a donne le terme $RF_1(a)$; l'action mutuelle de deux poutres donne un terme de la forme $S[F_1(a_1) - F_2(a_1)]$; il y a en outre des termes de la forme $NF''(x_0)$. De tous ces termes il ne reste que $F_1(x)$, si nous supposons les appuis de niveau, et si les poutres peuvent reposer les unes sur

les autres sans déformation initiale. On a donc

$$F_i(x) = \sum_1^r \int_{x_0}^X \varphi_i^{IV} F_i(z)\, dz. \qquad (1)$$

Si les appuis étaient à des niveaux différents et si on chassait des coins entre les poutres pour réaliser des différences $F_i(a_i) - F_2(a_i)$, il y aurait à conserver les termes dont il a été question précédemment. On peut transformer l'intégrale de la formule (1) en remarquant que

$$\int_{x_0}^X \varphi^{IV} F(z)\, dz = -\int_{x_0}^X \varphi''' F'(z)\, dz = \int_{x_0}^X \varphi'' F''(z)\, dz.$$

Or

$$\varphi'' = \varepsilon \frac{d\varphi'}{dx}, \quad F''(z) = \frac{M}{\varepsilon}.$$

On a donc

$$\int_{x_0}^X \varphi^{IV} F(z)\, dz = \int_{x_0}^X \frac{d\varphi'}{dz} M dz = -\int_{x_0}^X \varphi' K dz = \int_{x_0}^X \varphi\, p dz.$$

Dans la charge p figurent les réactions d'appuis et les actions mutuelles des poutres et même des accords extrêmes du troisième degré; en les indiquant explicitement, la formule (1) devient

$$F_i(x) = \sum_1^r \int_{x_0}^X \varphi_i (p_i + R_i + S_i + T_i)\, dz. \qquad (2)$$

Il est facile de voir que les termes dus aux réactions des appuis et aux réactions mutuelles des poutres s'évanouissent. Considérons par exemple la réaction R de l'appui a; il en résulte un terme de la forme $R\,\varphi_i(a)$; or $\varphi_i(a) = 0$; donc ce terme disparaît. Considérons maintenant l'action $+S, -S$ entre les deux premières poutres au point a_i; on a $S[\varphi_i(a_i) - \varphi_2(a_i)]$; ce terme s'évanouit. Il vient donc finalement

$$F_i(x) = \sum_1^r \int_{x_0}^X \varphi_i\, p_i\, dz. \qquad (3)$$

Les accords extrêmes disparaissent parce que l'on a

$$\varphi''(x_0) = 0, \qquad \varphi''(X) = 0.$$

On obtient les autres éléments de la poutre par dérivation; on trouve

$$F_i'(x) = \sum_1^r \int_{x_0}^X D_x\varphi_i \, p_i \, dz \tag{4}$$

$$M = \sum_1^r \int_{x_0}^X \varepsilon D_x^2\varphi_i \, p_i \, dz \tag{5}$$

$$K = \sum_1^r \int_{x_0} \left[\varepsilon D_x^2\varphi_i + \frac{d\varepsilon}{dx} D_x^2\varphi_i \right] p_i \, dz. \tag{6}$$

On voit que l'on peut encore représenter par des aires tous les éléments de l'une des poutres; mais on n'arrive plus au but en effectuant des constructions linéaires exactes; les courbes φ, $D_x\varphi$, $D_x^2\varphi$, $D_x^3\varphi$ dépendent des fonctions qui expriment les lois de variation des moments d'inflexibilité et ne peuvent généralement s'obtenir que par des constructions approchées.

Supposons une charge isolée prise pour unité et parcourant la poutré i'; on fera

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0 \cdots p_r = 0$$

$$\int_z^{z+\delta z} p_{i'} dz = 1.$$

On trouve pour la section x de la poutre i

$$y = \varphi_{i'}$$
$$y' = D_x\varphi_{i'}$$
$$M = \varepsilon D_x^2\varphi_{i'}$$
$$K = \varepsilon D_x^3\varphi_{i'} + \frac{d\varepsilon}{dx} D_x^2\varphi_{i'}.$$

Ce sont les équations des lignes d'influence pour la section x. Les trois premières sont respectivement les courbes

élastiques de la poutre chargée pour une force 1, un couple — 1, un $\Delta\eta = 1$ concentré dans la section dont on étudie les éléments. La quatrième est une combinaison de la troisième et de la courbe élastique de la poutre chargée pour un $\Delta y = -1$ concentré dans la même section.

Les lois de réciprocité s'énoncent facilement. Ainsi, par exemple, une force sollicite la section x d'une poutre et produit une flèche f dans la section z d'une autre poutre; si la force est transportée dans la section z, on retrouve en x la même flèche f.

NOTE XI.

Aperçu historique.

§ 1. — INTÉGRATION PAR ÉLÉMENTS TRÈS-PETITS.

374. Leibnitz (1674). — Leibnitz inventa le calcul différentiel pour résoudre le problème des tangentes. La direction de la tangente à une courbe $y = f(x)$ lui est donnée par l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont dirigés suivant les axes des x et des y et sont proportionnels aux accroissements instantanés dx, dy des coordonnées du point de la courbe. Le triangle de Leibnitz donne immédiatement la solution approchée du problème inverse. Si on donne la dérivée $f'(x)$, on peut tracer approximativement la courbe intégrale en la remplaçant par un polygone formé de tangentes en des points très-voisins; au lieu de faire varier continûment la direction de la tangente, on la fera varier brusquement vers le milieu de l'intervalle qui sépare les points pour lesquels on détermine la tangente. Il paraît certain que cette construction approchée était connue de Leibnitz, car les problèmes du calcul intégral sont appelés par lui : problèmes qui dépendent de la méthode inverse des tangentes. Il annonce qu'il sait résoudre ces problèmes par une *analyse certaine*. Il n'y a, nous semble-t-il, qu'une seule manière d'expliquer les mots :

analyse certaine; c'est que ces problèmes, par l'énoncé même, comportent une solution approchée évidente, mais que Leibnitz est parvenu à les résoudre par une méthode exacte.

Après Leibnitz, l'analyse infinitésimale se débarrasse de plus en plus des considérations géométriques; les géomètres dirigent tous leurs efforts vers l'intégration analytique. Toutefois certaines équations différentielles résistent à ces efforts; ces équations définissent des fonctions transcendantes nouvelles; on ne peut étudier ces fonctions qu'au moyen des équations différentielles; la méthode inverse des tangentes réapparaît.

875. M. Boudin (1861). — L'exemple le plus remarquable de la discussion de la forme d'une courbe définie par son équation différentielle se rencontre dans le mémoire de M. Boudin intitulé : De l'axe hydraulique des cours d'eau contenus dans un lit prismatique, et des dispositifs réalisant, en pratique, ses formes diverses.

Avant l'apparition de cet ouvrage, la théorie du mouvement des eaux courantes n'était presque pas constituée. C'est en effet dans ce travail que l'on trouve pour la première fois posé et résolu le problème de la détermination d'un axe hydraulique, connaissant les circonstances d'aval et d'amont. La forme même des axes hydrauliques était incomplètement connue; Belanger s'était borné à traiter le cas d'un lit très-large, cas où l'on peut trouver l'équation finie des axes hydrauliques. M. Boudin, au contraire, aborde la discussion des axes hydrauliques dans le cas d'un lit concave de forme quelconque; il ne pouvait pas être question de résoudre un problème aussi général par l'intégration analytique; c'est au moyen de l'équation différentielle que M. Boudin découvre les propriétés des axes hydrauliques. C'est au fond un exemple d'intégration graphique. Sans doute M. Boudin ne dit pas explicitement que l'axe hydraulique peut être tracé approximativement par des petites tangentes; cela est trop évident. Il croit plus

utile de démontrer par une *analyse certaine*, les inductions fournies par le tracé d'un polygone approché.

876. M. Sonnet (1867). — L'intégration graphique par éléments très petits est exposée d'une manière générale dans le dictionnaire des mathématiques appliquées de M. Sonnet à l'article calcul par le trait, page 164. Soit $f(x, y, y') = 0$, l'équation différentielle d'une courbe; on se donne un point initial (x_0, y_0) de la courbe; on calcule y'_0; on trouve un point voisin (x_1, y_1) en remplaçant la courbe intégrale par sa tangente; on calcule y'_1, on trouve un troisième point. M. Sonnet obtient d'une manière analogue l'intégrale d'une équation différentielle de la forme $ds = \varphi(x,y)\,dx$. La ligne brisée ainsi obtenue, dit M. Sonnet, ne représente la courbe cherchée qu'avec une approximation assez grossière; elle suffit néanmoins, dans beaucoup de cas, pour donner une idée de l'allure de la courbe véritable. Il aurait pu ajouter que par la méthode des approximations successives on peut donner à ce tracé une exactitude comparable à celle des meilleures formules de quadratures approchées. Ainsi, après avoir calculé y_1 par la méthode du rectangle, on peut déterminer y'_1 et appliquer la méthode du trapèze pour obtenir plus exactement y_1. Ayant trouvé de cette façon y'_0, y'_1, y'_2, on peut appliquer la méthode de Simpson et ainsi de suite.

877. Joseph M. Solin (1872). — *Ueber graphische intégration.* — Cet ouvrage est le premier écrit spécial sur l'intégration graphique; il comprend 8 pages et 4 figures. En voici l'analyse :

1. *Remarques générales.* Représentation d'une fonction par une courbe, de l'aire par une courbe intégrale.

2. *Différentiation graphique.* La dérivée est le coefficient angulaire de la tangente.

3. *Intégration graphique.* On choisit des abscisses $x_1, x_2, x_3 \ldots$ suffisamment voisines pour que dans chaque intervalle on puisse considérer la courbe dérivée comme une ligne

droite. Si dans cette hypothèse on mène des tangentes aux points correspondants de la courbe intégrale, on forme un polygone circonscrit; les sommets de ce polygone circonscrit tombent au milieu des intervalles compris entre les verticales $x_1, x_2, x_3 \ldots$; car si la courbe dérivée est une droite, la courbe intégrale est une parabole du second degré et, dans une parabole, les tangentes se coupent au milieu de l'intervalle qui sépare les ordonnées des points de contact. Connaissant les abscisses des sommets du polygone circonscrit à la courbe intégrale, connaissant les directions des côtés par le triangle de Leibnitz, on peut tracer le polygone et le problème est résolu. Si on projette les points de la courbe dérivée sur l'axe des y, et si on joint les projections au point $(y = 0,\ x = -1)$, on obtient les directions des tangentes par un faisceau de rayons. M. Solin applique cette méthode aux deux exemples suivants :

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx, \qquad \int \frac{a dx}{x}.$$

4. *Intégration des équations différentielles.* Soit à intégrer l'équation $f(x, y, y') = 0$; on pose $y' = h$, $y' = h_1$, $y' = h_2$ etc., et on construit les courbes

$$f(x,y,h) = 0, \qquad f(x,y,h_1) = 0, \text{ etc.}$$

Entre deux courbes on admet que l'intégrale est un arc de parabole et on trace comme précédemment un polygone circonscrit à l'intégrale. M. Solin applique cette méthode à l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2.$$

5. *Intégrales des équations aux différences totales.* Soit à intégrer l'équation

$$dz = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$$

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} = \frac{d\mathrm{N}}{dx}.$$

La fonction z est représentée par une surface; on donne le point x_0, y_0, z_0; on détermine la section $y = y_0$ par l'équation

$$dz = \mathrm{N}(x, y_0)\, dx.$$

On peut alors tracer les sections $x = x_0$, $x = x_1$, etc., par les équations

$$dz = \mathrm{M}(x_0, y)\, dy$$
$$dz = \mathrm{M}(x_1, y)\, dy.$$

878. Méthode de Rossin. — En 1882, M. Lisleferme publia dans les annales de la société scientifique de Bruxelles une note d'où il résulte que, vers 1850, feu M. Rossin, ingénieur de la marine française, avait inventé une méthode d'intégration graphique; cette méthode n'a pas été publiée. D'après les souvenirs de M. Lisleferme, ce serait une intégration par éléments très-petits, analogue à celle de MM. Sonnet ou Solin. La méthode de Rossin a été transmise par tradition; elle est enseignée à l'école du génie maritime de France; on la trouve exposée dans les cours autographiés de cette école. Toutefois ces documents ne concordent pas avec les souvenirs de M. Lisleferme; d'après les cours que nous avons cités, Rossin aurait utilisé les courbes intégrales, mais il ne les construisait pas par une intégration graphique; il calculait les ordonnées de ces courbes par les formules de quadratures approchées. Ce qui parait certain c'est que Rossin avait employé les courbes intégrales pour déterminer les centres de gravité et les moments d'inertie.

§ 2. — La statique graphique.

Culmann publia en 1866 le premier traité de statique graphique. Depuis, cette science a été enseignée dans la plupart des universités; on publie encore tous les jours de nouveaux traités de statique graphique. Sous ce nom on expose différentes méthodes graphiques que l'on peut classer de la manière suivante.

879. Calcul par le trait. — Le calcul par le trait a

été réuni en corps de doctrine par Cousinery, ingénieur français, en 1838. Il n'a rien de commun avec la statique; il comprend : la multiplication, la division, le calcul des puissances, les extractions de racines carrées; toutes ces opérations sont effectuées par la géométrie élémentaire en utilisant les quatrième et moyenne proportionnelles. On extrait les racines cubiques ou les racines plus compliquées par la spirale logarithmique; les racines des équations s'obtiennent par des intersections de courbes. On y ajoute quelquefois l'usage des règles à calcul, du planimètre, la méthode de Lill pour l'extraction des racines des équations, les tables graphiques de M. Lalanne etc.

La transformation des aires forme un chapitre important des traités de statique graphique. On détermine la surface d'un triangle en le transformant en un triangle de hauteur 2 et de base f; la surface du triangle est représentée par f. Une aire polygonale peut être transformée en un triangle équivalent; on est ramené au problème précédent. Pour calculer la surface limitée par un contour curviligne, on inscrit un polygone; on ajoute à l'aire du polygone des segments que l'on transforme en triangles en les considérant comme des segments paraboliques. C'est par des tracés de cette espèce que Culmann effectue les calculs des terrassements. Les surfaces de déblai et de remblai sont des polygones que l'on transforme en triangles; les volumes de déblai et de remblai sont représentés par des trapèzes que l'on décompose en triangles; tous ces triangles sont transformés en triangles de hauteur constante.

880. Statique pure. — Depuis Varignon (1654-1722) on étudie les conditions d'équilibre du polygone funiculaire et on calcule les tensions des barres ou des cordons par un tracé connu sous le nom de polygone de Varignon. Plus tard, on a appliqué la même méthode au calcul des tensions des barres d'un système réticulaire. Ces problèmes ne forment en réalité qu'un paragraphe de la statique géné-

rale. Si ces questions ont pris dans les ouvrages de statique graphique une étendue si considérable, c'est pour les deux raisons suivantes : 1° De même que sous le nom de géométrie de position on avait rendu la géométrie supérieure indépendante de toute idée de mesure, on voulait rendre la statique graphique indépendante de la statique ordinaire. 2° La détermination de l'ordre des lignes du polygone des forces a donné naissance à la théorie des polyèdres réciproques. Cette théorie est très-intéressante, mais n'est pas indispensable (150).

881. Polygone funiculaire. — Le polygone funiculaire est l'opérateur par excellence de la statique graphique; on l'emploie partout où il y a moyen de l'introduire. Ainsi, le lieu des moments fléchissants d'une poutre droite est considéré comme un polygone ou une courbe funiculaire(1). Les expressions de la forme

$$\Sigma P \frac{x}{H}, \quad \Sigma P \frac{x}{H} \frac{y}{H'} \frac{z}{H''}$$

sont calculées comme si elles représentaient des moments de forces; le polygone funiculaire combiné avec des transformations basées sur les lignes proportionnelles devient ainsi un polygone de sommation et de multiplication.

La courbe élastique d'une poutre droite est la courbe funiculaire due à une charge fictive représentée par le moment fléchissant. En décomposant la surface des moments en parties connues et inconnues, on remplace la courbe funiculaire par un polygone que l'on peut tracer par la méthode des fausses positions. C'est ainsi que M. Mohr a déterminé graphiquement l'état de sollicitation d'une poutre droite.

Ce sont surtout ces applications mystérieuses du poly-

(1) La démonstration la plus directe et la plus simple du tracé des moments fléchissants dus à un système de forces isolées consiste à remarquer que le moment d'une force P à l'unité de distance est égal à P et à superposer les moments des différentes forces. (Voir la note du n° 125).

gone funiculaire qui ont pu faire croire que l'on se trouvait en présence d'une science nouvelle où le polygone funiculaire devenait un agent systématique de calcul graphique.

Dans les premiers traités de statique graphique, il n'est pas question d'intégration. Ce n'est que dans l'édition de 1875 que Culmann montre que les polygones de sommation et de multiplication permettent de construire une expression de la forme

$$\Sigma x \frac{\Delta P}{H}$$

valeur grossièrement approchée d'une intégrale définie. Ces polygones de sommation, dit Culmann, sont les instruments d'intégration les plus avantageux du calcul graphique (die vorzüglichsten Intégrationsinstrumente des graphischen Rechnens)[1]. Culmann paraît ignorer l'intégration par la méthode inverse des tangentes. Si on applique en effet la méthode de Culmann à l'intégrale de ydx, on lui donne comme valeur grossièrement approchée $\Sigma y\ \Delta x$; on considère cette expression comme la somme des moments des forces Δx appliquées aux points (x, y); on trouve cette somme par un polygone funiculaire ou un lieu de moments fléchissants. Or cette construction est précisément l'intégration graphique par les tangentes appliquées à l'expression

$$\int x dy.$$

S'il s'agissait de trouver cette intégrale, la méthode de Culmann serait identique à la méthode inverse des tangentes; mais quand il s'agit de trouver

$$\int y dx$$

la méthode de Culmann est à la fois moins directe et moins simple que l'intégration par éléments connue depuis Leibnitz.

---

(1) Dans l'édition française de 1880, on a traduit ces mots par : le moyen le plus commode d'intégrer graphiquement

§ III. — L'INTÉGRATION GRAPHIQUE CONSIDÉRÉE COMME SCIENCE EXACTE.

882. — Notre système de constructions repose sur trois idées fondamentales dont nous revendiquons la priorité : 1° constituer l'intégration graphique comme science exacte, 2° l'employer comme opérateur universel, 3° déterminer les constantes d'intégration en rapportant les intégrales générales à des lignes de repère paraboliques[1].

Le calcul intégral comprend des méthodes d'intégration exacte et des formules de quadratures approchées. Avant nos travaux, il n'existait, comme intégration graphique, que la méthode inverse des tangentes, c'est-à-dire un tracé grossièrement approché, équivalent à la méthode des rectangles (Sonnet) ou des trapèzes (Solin). Nous avons pensé que l'intégration graphique pouvait avoir, comme le calcul intégral, des méthodes exactes, des procédés d'investigation, des constructions approchées équivalentes aux meilleures formules de quadrature. Une courbe dérivée peut être déterminée par des éléments suffisants : points, tangentes, ou autres lignes; dans notre système, l'intégration graphique consiste à construire exactement des éléments suffisants pour déterminer les courbes intégrales de divers ordres. Ces courbes intégrales ne se tracent que si on en a

(1) Ces trois idées sont formulées dans une note que nous avons publiée dans le bulletin mensuel de l'Association des ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand (décembre 1877). Dans les thèses que nous avons publiées et défendues en 1874, nous avions déjà indiqué en termes généraux les problèmes que l'on pouvait résoudre par l'intégration graphique; mais nous n'avions pu, dans des énoncés concis, indiquer la nature de nos méthodes. Le mémoire, dont la note de 1877 était un résumé, a été augmenté de plusieurs recherches nouvelles annoncées en 1884 (*Revue universelle des mines*); ces questions ont fait l'objet de plusieurs causeries données en 1884 et 1885 à la section de Gand de l'Association des ingénieurs.

besoin; dans bien des problèmes, les polygones qui les remplacent suffisent.

On peut dire que notre système est l'opposé de celui de MM. Sonnet et Solin: dans la méthode inverse des tangentes, on trace effectivement la courbe intégrale par éléments aussi petits que possible; au contraire, nous représentons les courbes entières par des polygones de quelques côtés qui permettent d'effectuer exactement les intégrations ultérieures; nous ne nous préoccupons pas des courbes intégrales, sachant bien que, quand nous le voudrons, nous en trouverons facilement une ordonnée et ses dérivées.

Nous nous sommes occupés spécialement des fonctions entières, parce qu'elles suffisent pour résoudre la plupart des problèmes relatifs à l'art de l'ingénieur; dans ce cas, toutes les constructions sont linéaires. Mais il est facile d'appliquer ces principes à toutes les fonctions. Ainsi, par exemple, dans l'intégration des fractions rationnelles, on introduit les courbes

$$y = \mathrm{A} \log (x - a).$$

Une courbe de cette espèce est complètement déterminée par son asymptote et un point $x = a + e$, $y = \mathrm{A}$. Si plus tard, on doit tracer la courbe, on se servira d'un patron logarithmique. De même, en représentant par des patrons les fonctions transcendantes $\sin x$, $\sin amx$, $\cos amx$, etc., on peut intégrer graphiquement toutes les expressions que l'on intègre analytiquement. Dans les applications, les fonctions que l'on rencontre sont généralement ou entières, ou trop compliquées pour pouvoir être intégrées exactement. Dans ce dernier cas, nous remplaçons la courbe dérivée par une parabole d'interpolation; nous pouvons alors trouver les intégrales de divers ordres par des polygones ayant un nombre de côtés restreint et sans faire de nouvelles erreurs. Dans l'intégration successive par éléments très-petits, au contraire, on commet des erreurs grossières à chaque

intégration et ces erreurs s'accumulent en s'ajoutant aux précédentes.

L'intégration graphique des équations différentielles conduit aussi à des résultats utiles ; nous avons montré par des exemples (724) que l'on pouvait par la géométrie intégrer des équations qui résistent assez bien aux méthodes analytiques(1).

Nous considérons l'intégration graphique comme l'opérateur universel ; si la différentiation est la méthode générale d'étudier les fonctions connues, c'est l'intégration qui engendre les fonctions inconnues ; comme l'intégration comprend comme cas particulier la sommation et la multiplication, on peut dire qu'aucune question ne peut résister à l'intégration graphique. Il y a plus : tous les problèmes utiles à l'art de l'ingénieur se ramènent à construire des intégrales de divers ordres ; exemples : lignes des surfaces, courbes de moments, lignes de résultantes, lignes de pression, courbes funiculaires, lieu des efforts tranchants, des moments fléchissants, courbes élastiques, etc. La plupart de ces propriétés étaient ignorées ; Rossin avait bien inventé les courbes intégrales, mais il n'avait pas publié ses recherches et il n'avait appliqué l'intégration graphique qu'aux moments du premier et du second degré. L'existence de la statique graphique nous démontrera plus loin que Culmann

(1) Nous avons eu l'occasion, quand nous étions en service, d'appliquer l'intégration graphique aux équations aux dérivées partielles. On se donne des courbes arbitraires et s'il y a lieu, des dérivées le long de ces courbes ; on détermine les éléments de proche en proche. Les discontinuités des courbes arbitraires se propagent suivant les caractéristiques de Monge. Dans le mouvement varié des eaux courantes, ces caractéristiques représentent le mouvement de deux ondes infiniment petites, l'onde d'amont, l'onde d'aval ; l'onde devient finie quand il y a mascaret. Dans la poussée des terres ces caractéristiques divisent le massif en régions ; une des régions se trouve sous l'influence du mur de soutènement ; une autre se trouve dans les mêmes conditions que si le massif était indéfini. Ces recherches feront l'objet d'un mémoire spécial.

et ceux qui l'ont suivi ignoraient complètement que la courbe funiculaire fût une intégrale seconde.

L'idée des lignes de repère nous a paru indispensable pour trouver simplement une intégrale particulière au moyen de l'intégrale générale. C'est la considération de ces lignes de repère qui nous a amené à chercher pour les paraboles des polygones d'intégration permettant d'exprimer facilement le contact des paraboles entre elles et des paraboles de repère avec l'intégrale générale.

883. Problèmes simples de l'intégration exacte. — Si la courbe dérivée est une ligne à gradins, on trouve immédiatement que la ligne intégrale est un polygone dont les directions des côtés s'obtiennent par le triangle de Leibnitz. Si la courbe dérivée est un polygone, on remplace chacun des trapèzes par un rectangle ou deux rectangles équivalents et on est ramené au cas précédent; la ligne intégrale est une suite d'arcs paraboliques du second degré; chacun d'eux est complètement déterminé par deux tangentes extrêmes. On peut dire que dans ces problèmes simples toutes les propriétés qu'il fallait appliquer étaient connues de tout le monde. Cependant nous allons démontrer que ces intégrations graphiques n'avaient jamais été appliquées comme telles.

Une poutre droite supporte des charges uniformes; le lieu des efforts tranchants s'obtient élégamment en intégrant une ligne à gradins. Nous avons cherché si, avant nos thèses de 1874, on avait mentionné ce tracé, soit dans un cours imprimé, soit dans un enseignement oral; nos recherches ont été vaines. Dans les traités de statique graphique, on traçait le lieu des moments fléchissants dans le cas de forces isolées, au moyen du polygone funiculaire. Si au lieu de considérer ce tracé comme une opération unique, nous traçons d'abord le lieu des efforts tranchants, nous voyons que le lieu des moments fléchissants est l'intégrale d'une ligne à gradins. Nous pouvons donc

affirmer : 1° que Culmann et ses continuateurs n'ont pas vu que le lieu des moments fléchissants était l'intégrale du lieu des efforts tranchants, sinon ils auraient appliqué immédiatement l'intégration d'une ligne à gradins au problème précédent, 2° que l'intégration exacte d'une ligne à gradins était si peu soupçonnée qu'on ne la reconnaissait pas lorsqu'elle se présentait d'elle-même, déduite de considérations de statique.

Nous arrivons aux mêmes conclusions en examinant l'épure de Culmann relative au mouvement des terres; il s'agit tout simplement d'intégrer un polygone; Culmann résout ce problème par la transformation des triangles en triangles équivalents de hauteur 2; ces constructions pénibles ne peuvent pas être comparées au tracé si élégant que fournit l'intégration graphique.

Ces exemples prouvent à l'évidence que l'intégration graphique était l'objet d'un préjugé; tout le monde aurait construit immédiatement l'intégrale d'une ligne à gradins ou d'un polygone si l'on avait posé le problème; mais personne ne soupçonnait que, pour des questions élémentaires l'intégration graphique aurait donné une solution plus simple que tout autre moyen. Quand il s'agit de calculer des rectangles ou des trapèzes, il n'y a aucun avantage à appliquer le calcul intégral; aussi quand on a pensé à calculer graphiquement ces surfaces, c'est à la géométrie élémentaire et non à l'intégration que l'on s'est adressé.

Nous trouvons un exemple de la force de ce préjugé dans l'ouvrage déjà cité de M. Solin. M. Solin sait, comme tout le monde, que si le petit arc de la dérivée est rectiligne, les tangentes à l'intégrale se coupent au milieu de l'intervalle qui sépare les ordonnées des points de contact. Il ne pense pas à dire que si la courbe dérivée est formée de droites aussi grandes que l'on veut, il est complètement inutile d'appliquer sa méthode, que l'on peut supprimer la courbe intégrale et les tangentes très-rapprochées qui la

déterminent, qu'il suffit de conserver les tangentes extrêmes et que l'on a ainsi le moyen de dresser élégamment l'épure du mouvement des terres. Au lieu de diriger ses regards vers les problèmes faciles, M. Solin s'occupe surtout de construire des intégrales qui ne peuvent s'exprimer par l'analyse, comme si c'était cela le seul avantage de l'intégration graphique.

Les lecteurs de l'ouvrage de M. Solin n'ont pas vu, plus que l'auteur, le parti que l'on pouvait tirer de l'intégration graphique. En 1873, M. Favaro analyse le mémoire de M. Solin dans un ouvrage intitulé : La statica graphica nell' insegnamento tecnico superiore. Quatre ans plus tard, il publie ses leçons de statique graphique, et il reproduit l'épure de Culmann pour le mouvement des terres. Ce n'est que dans l'édition française et après avoir pris communication de notre mémoire qu'il applique l'intégration graphique.

Ce préjugé, ou plutôt cette répulsion dont l'intégration graphique était l'objet, avait sa raison d'être. Ne pouvait-on pas affirmer *à priori* l'impossibilité absolue d'arriver par l'intégration graphique à des constructions différentes de celles que l'on trouverait par la géométrie? Cette affirmation est vraie. Si nous examinons de plus haut les constructions des lignes intégrales, nous pouvons les considérer comme des successions de quatrièmes proportionnelles ou des transformations de rectangles en rectangles de base 1. Seulement, si en analyse les mêmes équations fournissent toujours les mêmes valeurs pour les inconnues, en géométrie les mêmes triangles, les mêmes quatrièmes proportionnelles fournissent tantôt une épure embrouillée, tantôt une épure élégante. La ligne intégrale est, dans les problèmes qui nous occupent, le fil conducteur qui a rassemblé tous ces triangles de manière à rendre l'épure la plus simple possible; c'est ce fil conducteur que l'on n'a pas soupçonné. C'est dire qu'une fois l'ordre des lignes

établi, on peut abandonner l'intégration et vérifier les constructions par les lignes proportionnelles ou la transformation des aires. On peut même en utilisant le tronc de pyramide arriver, sans calcul intégral, jusqu'au polygone d'intégration de la parabole du troisième degré.

§ IV. — L'INTÉGRATION GRAPHIQUE EXACTE ET LA STATIQUE GRAPHIQUE.

884. Pour comparer l'intégration graphique à la statique graphique, nous prendrons comme exemple le cas d'une poutre sur plusieurs appuis. Nous supposerons que le poids mort est représenté par une suite de courbes que l'on assimile à des arcs paraboliques du second degré. On résout immédiatement ce problème en intégrant par polygones semi-circonscrits; on peut trouver par des constructions exactes tous les éléments de la poutre y compris la flèche de déformation.

Tous ces tracés ont l'avantage considérable de ne reposer que sur une seule règle; la construction du polygone d'intégration des paraboles.

Voyons maintenant comment on pourrait résoudre ce problème par la statique graphique. Le lieu des moments fléchissants est une courbe funiculaire; on décompose la surface des charges en triangles et en segments de paraboles; on évalue les poids de ces surfaces par la transformation des aires en reproduisant l'épure de Culmann pour le mouvement des terres. On applique ces poids aux centres de gravité correspondants; on les détermine par la géométrie. On trace enfin le polygone funiculaire; ce polygone enveloppe la courbe des moments fléchissants. Il est nécessaire pour la suite des opérations de tracer effectivement cette courbe; il faut donc diviser la surface des charges par des ordonnées très-voisines, et l'on devine combien toutes ces constructions seront pénibles. Il faut ensuite construire la courbe élastique qui est la seconde courbe funiculaire, en appliquant les constructions précédentes à la surface des

moments fléchissants. Il est vrai qu'il suffit pour appliquer la méthode de M. Mohr de connaître pour chaque travée le poids et le centre de gravité de cette surface et qu'on peut employer le planimètre; mais il faut alors représenter les moments statiques par des aires et les courbes qui limitent ces aires doivent être construites par points très rapprochés. En outre, on ne se réserve plus la faculté de trouver les flèches de déformation. Cet exemple prouve à l'évidence que les constructions fondées sur l'intégration graphique dépassent de beaucoup en simplicité et en élégance les expédients de la statique graphique. La raison pour laquelle les inventeurs de la statique graphique sont arrivés à des résultats si pitoyables doit être cherchée dans l'influence de la géométrie allemande. On a voulu supprimer toute idée de mesure et transformer complètement la géométrie de Poncelet; on a voulu également écarter l'analyse de la statique; on a fini par oublier que le calcul intégral existait. On a appliqué la courbe funiculaire, sans se donner la peine de chercher quelle était la nature analytique de cette courbe, et on n'a pas vu que c'était une intégrale seconde. Le tracé de la courbe funiculaire ou du polygone qui la remplace n'est pas une opération unique; il se divise en deux opérations identiques; ce sont deux intégrations. En statique graphique, on effectue la seconde intégration par la règle de Leibnitz. N'est il pas ridicule d'abandonner cette règle pour la première intégration et d'y substituer toutes ces constructions pénibles fondées sur la transformation des triangles.

Non seulement la courbe funiculaire est un opérateur imparfait lorsqu'on ne la considère pas comme une intégrale seconde; mais on n'a pas même su utiliser cet opérateur de la manière la plus convenable. On remplace la courbe funiculaire par un polygone en décomposant la charge en charges isolées. Pourquoi a-t-on effectué cette décomposition au hasard? On aurait dû chercher s'il n'existait pas

certains modes de décomposition conduisant à des constructions plus élégantes, si notamment on ne pouvait pas remplacer la courbe funiculaire par un polygone qui la déterminât mathématiquement de telle façon qu'on pût à volonté trouver un point de la courbe et construire exactement le second funiculaire. Prenons le cas d'un trapèze parabolique; la parabole est du second degré, elle est déterminée par les tangentes extrêmes. Dans les ouvrages de statique graphique les plus récents, on décompose la surface en un trapèze ordinaire et un segment de parabole. Il est facile de voir qu'il est plus simple de remplacer la surface par trois forces représentées par les trois ordonnées de la figure et appliquées en trois points qui divisent l'intervalle des ordonnées extrêmes en quatre parties égales. En adoptant ce mode de décomposition, on trouve un polygone qui détermine mathématiquement la courbe funiculaire; c'est le polygone d'intégration tracé conformément aux règles de l'intégration graphique. Nous ferons la même remarque au sujet de la méthode de M. Mohr; en appliquant l'idée des lignes de repère, on arrive à un mode de décomposition beaucoup plus simple; on est ramené au cas d'une poutre non chargée; toutes les complications des lignes croisées disparaissent.

Nous avons dit que l'intégration graphique s'applique naturellement à tous les problèmes sans aucun effort d'invention. Rien de semblable n'existe en statique graphique. Tout ce qu'on sait, c'est que l'on a introduit le polygone funiculaire dans quelques questions; que ces questions sont résolues par la méthode ingénieuse de Monsieur X, la méthode ingénieuse de Monsieur Y. Mais si un autre problème se présente, comment verra-t-on qu'on peut le résoudre par une nouvelle méthode ingénieuse? L'intégration graphique donne la réponse à cette question. S'il s'agit d'une intégrale d'ordre impair, ne cherchez pas. Si, au contraire, il s'agit d'une intégrale d'ordre $2n$, considérez-la

comme la courbe funiculaire de rang n; construisez chacune des intégrales d'ordre impair de la manière la plus compliquée en oubliant tout ce qui a été écrit sur le calcul intégral; vous aurez trouvé une nouvelle méthode ingénieuse de statique graphique; ce sera la méthode de Monsieur Z.

Ce qui nous étonne profondément, c'est qu'une science aussi ridicule ait pu se maintenir si longtemps. Si dans quelque île lointaine, un mathématicien imaginait l'algorithme suivant

$$\lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = p$$

$$y = \text{funiculaire}\,(p)$$

$$p = \text{charge}\,(y)$$

$$\text{fun.}\,(x^2) = Ax + B + \frac{x^4}{3.4}\ \text{etc.},$$

si ce mathématicien s'avisait de répandre ses idées dans le monde civilisé, on lui dirait immédiatement que sa méthode n'est qu'une mauvaise caricature de l'analyse infinitésimale. N'est-il pas triste de constater que la statique graphique, qui n'est que la traduction géométrique de cette méthode barbare, ait pu impunément se propager et cela dans la patrie de Leibnitz, deux siècles après ses immortelles découvertes.

§ V. — Ouvrages divers sur l'intégration graphique.

885. M. Nels (1877). — *Uber graphische integration und ihre anwendung in der graphischen statik.* M. Nels a eu comme nous l'idée d'employer l'intégration graphique d'une manière systématique; mais ses méthodes sont complètement différentes des nôtres. Il emploie la méthode de M. Solin et une autre méthode qu'il a inventée et qui est la traduction de la méthode des rectangles perfectionnée en prenant comme hauteur de chaque rectangle l'ordonnée de la courbe au milieu de la largeur. Il se rend parfaitement

compte du peu d'exactitude de ces procédés et il ajoute que l'on peut déterminer des points de la courbe intégrale avec plus de précision en utilisant les formules de quadrature approchée. Il compare avec beaucoup de soin toutes les formules de quadrature, mais il est étrange que l'idée ne lui vienne pas de construire ces formules. Ce n'est qu'en 1885 qu'il reproduit, sans qu'il paraisse s'en douter, les constructions que nous avions publiées en 1878.

L'idée des lignes de repère ne lui vient pas non plus; c'est ce qui explique la longueur des formules au moyen desquelles il exprime les moments de divers ordres.

Dans l'épure des moments fléchissants, c'est par l'analyse qu'il démontre que les moments fléchissants sont représentés par les segments d'ordonnée compris entre l'intégrale et sa corde. Il est évident d'après cela que dans les poutres encastrées ou à plusieurs travées, il arrive des méthodes qui n'ont rien de commun avec les nôtres.

886. M. Saviotti. — *Note sur les méthodes d'intégration graphique* (*Revue des mines*, 1883. *Giornale del Genio civile*, 1882). M. Saviotti applique aussi l'intégration graphique par éléments très-petits. Il ne donne que deux exemples d'intégration exacte : la ligne à gradins et le polygone. Pour dresser l'épure du mouvement des terres, il effectue deux intégrations successives; dans la première intégration, il reproduit sans s'en douter, une des méthodes que nous avions publiées en 1878. Mais il n'arrive pas à effectuer la seconde intégration d'une manière exacte; il donne deux tracés approchés qui consistent à remplacer l'intégrale première soit par un polygone inscrit soit par un polygone circonscrit. M. Saviotti aurait retrouvé la construction que nous avons publiée en 1878, s'il avait pensé à considérer la seconde intégrale comme un polygone funiculaire et à diviser les trapèzes primitifs en deux triangles.

FIN.

ERRATA.

pages	*lignes*	*au lieu de*	*lisez*
6	2 en rem.	$x - x_1$	$x = x_1$
14	10 en rem.	A et F	A et F (fig. 315)
39	11 en rem.	ligne ab	ligne A'B'
41	3	la position $a'b'$	la position
48	8	soit ABCD	soit ABCD (fig. 326, fig. c)
48	10	bd	bk
53	8	soit AB ... point B	soit AL ... point L
53	10	point B	point A
55	7	point D	point δ
57	6	fig. 320	fig. 330
80	16	soit AB	soit AB (fig. 337)
99	11	fig. 338	fig. 338bis
121	3 à 7	v_1, v_1', v_1''	$v_1^{(\alpha)}, v_1^{(\alpha-1)}, v_1^{(\alpha-2)}$
123	6	id.	id.
145	6	ou d'ordre n'	ou d'ordre $n' + 1$

PLANCHE I.

Fig. 313. Mettez a, c aux projections de A et C.

Fig. 314. Prolongez AM, menez l'horizontale du point G, mettez α au point d'intersection de ces deux droites.

Fig. 321. Mettez D à l'extrémité droite de la courbe, S, S' aux points d'application des forces P et P'.

Fig. 323, fige. Mettez D au point d'intersection de la courbe AB et de sa corde.

Fig. 314.

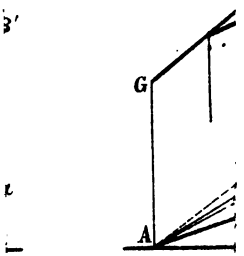
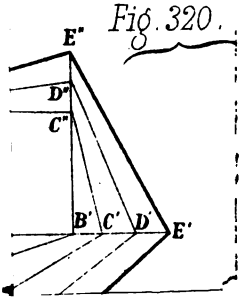


Fig. 320.



OUVRAGES DU MÊME AUTEUR.

Extraits des Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand.

Fr. C.

Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications, 735 pages de texte, atlas de 310 figures . . . . . 20 »

Cet ouvrage est l'exposé d'un système de méthodes graphiques basées sur l'intégration. La courbe funiculaire est considérée comme une intégrale seconde. Les problèmes qui dépendent d'intégrales d'ordre pair sont résolus d'une manière plus simple, plus générale ou plus exacte que par la statique graphique. On y trouve aussi la solution d'un grand nombre de questions qui dépendent d'intégrales d'ordre impair et qu'il n'est pas possible d'aborder par la statique graphique.

Note sur les intégraphes. — Intégraphe simple et multiple. Intégraphes polaires et leurs dérivés. Intégraphes des réciproques. Tracé mécanique des intégrales elliptiques. Balance à peser les polynômes 1 50

Note sur le calcul des cotisations des sociétés de secours mutuels . . . . . 1 »

Note sur la résolution graphique des équations du premier degré . . . . . 1 »